DE INFINITIS PARABOLIS,

ETC.

1

DE INFINITIS PARABOLIS,

DE INFINITISQVE SOLIDIS EX varijs rotationibus ipsarum, partiumque earundem genitis.

Vnà cum nonnullis ad prædictarum magnitudinum, aliarumque centra grauitatis attinentibus.



AVTHORE

F. STEPHANO DE ANGELIS

Biblioth. Scholar. VENETO, Piar. S. Pantaleonis

Ordinis Iesuatorum S. HIERONYMI, in Veneta Prouincia Definitore Prouinciali.







VENETIIS, MDCLIX.

Apud Ioannem La Noù.

SVPERIORVM PERMISSV.

Ex Lib. Mich. Borelli

[illegible]

[illegible]



Illuſtriſſimis & Excellentiſſimis D. D.

NICOLAO SAGREDO

Equiti, & D. Marci Procuratori.

IOANNI BAPTISTÆ

NANI, Equiti.

Pro Sereniſs. VENETA REPVBLICA ad S. M. C.

LEOPOLDVM I.

Rom.Imp.Oratoribus in aſſumptionis gratulationem deſtinatis.

F. STEPHANVS ANGELI VENETVS,
Ord.Ieſuatorum S.Hieronymi, in Veneta Prouincia Definitor Prouincialis. P.P.P.



ENETORVM celſiſſima Reſpublica, quæ Cæli Maieſtate inſignitur, dum quot Senatores, & Patres, tot Numina iactat, conſultò Vos (Equites Illuſtriſſimi, & Excellentiſſimi) Mercurios ſelegit, vt Germanica aula, quam publico nomine ſalutaturi aditis, prò legationis digniſſimæ offitio, viros excepiſſe

pisse glorietur, quibus visendis par est vt confluat, & aduoluatur genibus obsequentissimus Orbis. Profectò in amplissimi muneris pompam corda vobiscum trahitis, omniumquè Vos comitantur vota dedita mancipia. Æolus, & Neptunus, pro vestri tranquillitate itineris leges ferunt ventis, àc vndis; humus iucundiori amænitate leuigatur; Maiestas currum componit; ducit Virtus; Famaque tubis gloriosiorem aduentum personantibus dat auras, vt populos cunctos habeatis feliciter obuios. Pariter & ego comitatui me adiungere ardentius exoptaui, incunctantèr decreui, nè quos Mæcenates, & Patronos venerantur animi sensus, vnquam desererent. Vobis ideò, quos verè Geometrici Orbis Hercules fas est appellare, se sistit mea Mathesis, Vestro Nomini præclarissimo, & titulis se inscribit, Vobis se humillima dicat, arrhamque exhibet deuictissimi studij. Quot igitur exarati apices has qualescumque paginas implent, tot Vobis erigunt monimenta, tot vestræ probitatis excitant testes, tot eximiæ vestrum nobilitatis, & laudis explicant elogia. Exigua sanè hæc elucubratio, & tenuis labor, sed quem meritorum amplitudine cumulatis, summaquè vouentis deuotio complet, & absolutissimum perficit. Excipiatis conciuis obsequium, quod à patrijs vndis erga Vos suauitèr ebibit, pretiosius mehercle cunctis opibus, dùm vestra sapientia, & nobilitate ditatur, venerabundi affectus pondere non leuitèr grauitat. Forsan & hæc opellula carminibus Homeri non inuidet, si vos, qui Macedonis præstantiam æquatis, vrbanitate lenissima ipsi suffragabimini. Plura adderem, qui plurima debeo, maximaque libare percupio. Ast calamo, iter vobis impositum, iamque immi-

nens

nens ſtatuit metas. Diſceſſum, & reditum Fata Vobis benè fortunent. Ducat ſoſpites Virtus, Fortuna reducat incolumes.



Noi Reformatori dello Studio di Padoa.

HAuendo osseruato per fede del Padre Inquisitore non esserui, nel Libro Intitolato de Infinitis Parabolis Geometricis del Pad. F. Steffano Angeli da Venetia dell'Ordine de Gesuati, cosa contro la Santa Fede; come pure per attestato del Segretario nostro niente contro Prencipi, è buoni costumi, concedemo licenza, che possi esser stampato, douendo osseruarsi gl'Ordini, & essere presentate doi Copie per le Librarie Publiche di Padoa, e di questa Città. In.

Dat. dal Magistr. nostro 6. Febr. 1658.

Andrea Contarini Cau. Proc. Ref.
Nicolò Sagredo Cau. Proc. Ref.

Alemante Angelo Donini Segr.



LECTORI
BENEVOLO.





VBLICI iuris fecimus elapſo anno 1658. Libellum quendam, cuius titulus, SEXAGINTA PROBLEMATA GEOMETRICA. In huius calce appendiculam adiunximus, in qua occurritur P. Mario Bettino, Mathematico melifluo Societatis Iesù, Caualeriana indiuiſibilia veluti Dæmones pauenti. Paucis verò tranſactis diebus à ſupra dicti libelli impræſſione, ſortè incidimus Venetijs in libraria taberna Mineruæ, in opus aureum P. Andreæ Tacquet, Mathematici diſertiſſimi eiuſdem ſocietatis. CYLINDRICA, ET ANNVLARIA nuncupatum. Cuius operis dum paginas curſim volueremus, incidenter inſpeximus ſcholium propoſit. 12. lib. pri. in quo indiuiſibilia carpit, talibus verbis. *Methodum demonſtrandi per indiuiſibilia, vel*

b (*vt*

(*ut ego appellare soleo*) *per heterogenea*, *quam nobilis geometra Bonauentura Caualerius in lucem protulit*, *pro legitima, ac geometrica admittendam non existimo*. &c. Doluimus vehementer, opus tanta eruditione refertum, non prius ad manus nostras peruenisse. Censura autem in ipso contra indiuisibilia pronuntiata, parum, aut nihil nos deturbat. Vetera etenim continet, & non nisi eorum modica, & imbecilliora, quæ prius ab ipsomet Caualerio in præfatione geometriæ indiuisibilium, & à Guldino in Centrobaryca obijciuntur; quibus cum satis, superque occurrerit ipsemet Caualerius, & in eadem præfatione, & in exercitatione 3. contra Guldinum conscripta; nobis non est necesse tempus conterere, eadem repetendo. Leuiter dumtaxat aliqua tangemus in censuris Tacquet contenta.

Scholium ergo Tacquet, exordium sumit à nomenclatura indiuisibilium methodi. Caualerius, suam methodum appellauit methodum indiuisibilium. Tacquet verò methodum per heterogenea nuncapat. Sic enim loquitur. *Methodum demonstrandi per indiuisibilia, vel (ut ego appellare soleo,) per heterogenea*. Verùm enim verò, quoniam omnes illi, qui apud homines nota sapientiæ insigniti sunt, inter quos extant Cratyllus, & Heraclitus apud Ammonium 1. Periher. cap. 2. & Pythagorici apud Dexippum ibidem cap. 6. apertis verbis pronunciant, sapientis munus esse è rerum naturis nomina extrahere; relinquimus tuæ diligentiæ considerandum (benigne lector)

ctor) quisnam sapientiorem se præbuerit in huiusce nominis impositione, Caualerius, an Tacquet. Methodus, de qua nunc est sermo, procedit à lineis ad plana, à planis ad corpora; quidquid enim pronuntiat de omnibus lineis duorum planorum, intelligendum asserit de ipsis planis; & quam proportionem reperit inter duorum solidorum omnia plana; affirmat eandem intercedere inter solida ipsa. Cum autem lineæ extent naturæ diuersæ à planis, & plana à solidis; hinc Tacquet videtur methodum hanc per heterogenea nuncupare. Caualerius verò, quia lineæ sunt indiuisibiles secundum latitudinem, vtpotè ipsa carentes & plana sunt indiuisibilia secundum profunditatem, vnde lineæ sunt indiuisibiles secundum peculiarem diuisionem superficierum, hæque indiuisibiles pariter secundum propriam diuisionem corporum; methodum præsentem, nomine indiuisibilium methodi insigniuit. Vtique Caualerius agnouit, quod omnibus nimis est obuium, nimium lineas heterogeneas esse respectu planorum, planaque heterogenea extare respectu solidorum. At hæc nomenclatura nimis vniuersaliter naturam methodi exprimit, quæ præssius, & specificatius est adnotanda. Vtique probationes per methodum præsentem instituuntur per heterogenea, sed per heterogenea, talis naturæ, quæ sunt indiuisibilia. Heterogeneitas enim dat esse genericum; Indiuisibilitas verò specificum. Sed ad alia transeamus.

Postquam Tacquet affirmauit methodum indiui-

ſibilium illegitimam cenſendam eſſe, quia procecit à lineis ad ſuperficies, à ſuperficiebus ad plana, affert exemplum argumentationis per indiuiſibilia, exclamans. *Nam, vt rem exemplo declaremus, quem conuincat iſthæc ratiocinatio. &c.* Quem conuincat? omnes geometras, qui de ipſa ſunt locuti, tribus dumtaxat mathematicis, Societatis Ieſù exceptis, Guldino, Bettino, & Tacquet. Nos enim alios non vidimus ab his, ipſam non approbantes. Qualiter enim ipſa vſi ſint Ioannes de Beugrand, & Ioannes Antonius Roccha, poterit Lector inſpicere in exercit Caualerij. Qualiter etiam ipſam adhibuerit, ampliaueritque egregius Euangeliſta Torricellius, ſua perluſtranti opera, patebit. Inueniet enim ipſum de dimenſ. Parab. pag. 55. de tali methodo ſic alloquentem. *Reliquum eſt, vt eandem parabolæ menſuram noua quadam, ſed mirabili ratione aggrediamur; ope ſcilicet Geometriæ indiuiſibilium, & hoc diuerſis modis, &c.* Et pag. 56. *Quod autem hæc indiuiſibilium geometria nouum penitus inuentum ſit, equidem non auſim affirmare. Crediderim potius veteres geometras hac methodo vſos in inuentione theorematum difficillimorum, quamquam in demonſtrationibus aliam viam magis probauerint, ſiue ad occultandum artis arcanum, ſiue nè vlla inuidis detractoribus proferretur occaſio contradicendi. Quidquid eſt, certum eſt hanc geometriam mirum eſſe pro inuentione compendium, & innumera quaſi imperſcrutabilia theoremata, breuibus, directis, affirmatiuiſque demonſtrationibus confirmare; quod per doctrinam antiquorum fieri minime poteſt. Hæc enim eſt*

in

in Mathematicis ſpinetis via verè regia, quam primus omnium aperuit, & ad publicum bonum complanauit mirabilium inuentorum machinator Caualerius. Et in appendice de cycloide, pag. 86. ait. *Prima, & tertia* (intellige, demonſtrationes) *per nouam Indiuiſibilium geometriam nobis amiciſſimam procedent.* Et in proëmio ad Lectorem, in problemate ſolidi acuti hyperbolici infinitæ longitudinis pag. 94. ait. *Quo ad methodum demonſtrandi, vnicum quidem, & præcipuum theorema duplici conatu oſtendemus, & per indiuiſibilia, & more veterum. Quamquam (vt vera fateamur) primò inuentum ſit per indiuiſibilium geometriam, qui ſanè verus eſt demonſtrandi modus, ſcientificus, ſemper directus, & ipſi naturæ germanus. Miſeret me veteris geometriæ, quæ cum indiuiſibilium doctrinam, ſiuè non nouerit, ſiuè non admiſerit, circa dimenſionem ſolidorum adeo paucas veritates inuenit, vt ipſa penuria infelix ad ætatem noſtram peruenerit. Antiquorum enim theoremata, circa doctrinam ſolidorum, quota pars ſunt contemplationum, quas mirabilis noſtro æuo Caualerius (omiſſis alijs) inſtituit, circa tot claſſes ſolidorum, ſpecie differentium, multitudine abundantium?* Et itidem proſequens ſuum diſcurſum, dicens; sè velle procedere per indiuiſibilia curua, quorum nullum exemplum tradidit Caualerius, ait, ſibi ſufficere quod ſuum libellum approbauerit *doctiſſimus, & eruditiſſimus vir Raphael Magiottus.* Quibus verbis, nos admonet, etiam Magiottum, vnum ex illis fore, quem ratiocinatio per indiuiſibilia, conuincat. Et pagina 116. ait. *Tamen vt in hac parte ſatisfaciam lectori, etiam in-*

diuisibilium parum amico, iterabo hanc ipsam demonstrationem in calce operis, per solitam veterum geometrarum viam demonstrandi; longiorem quidem, sed non ideò mihi certiorem. Franciscus etiam à Schooten Leydensis in suo tractatu de organica conicarum sectionum in plano, descriptione, geometriam Indiuisibilium Caualerij passim recipit, & in præfatione ad Lectorem ait. *In quorum demonstrationibus Lectorem monitum velim, me breuitatis causa methodo indiuisibilium, quam subtilissimus Vir Bonauentura Caualerius iniuit, fuisse innixum: licèt, id alia quoque ratione exhibere potuerim.* Ricardus Albius Anglus, vir nobis facie notus, & amicissimus, in suo hemisphærio dissecto coroll. proposit. 39. ait. *Vnde per Geometriam indiuisibilium à P. Bonauentura Caualerio nuper repertam, facilè demonstrabitur, &c.* Et Paulò post. *Multa autem sunt, quæ ope huius Geometriæ, faciliùs in lucem prodeunt, quam veteri Archimedis Methodo, & ideò à geometris non negligendam censeo.* Ismael Bullialdus in suo tractatu de lineis spiralibus, in notat. 2. proposit. 42. ait. *Obiter hic notabimus tam perperam, ac improprio nomine indiuisibilium Methodum, nouum suum artificium appellauisse Caualerium, quam subtili, ac mirabili sagacitate, profundaque mentis indagine illud inuenisse, &c.* Et paulò post. *Ita vt appositè magis illam excellentissimam Methodum ὁμοιοσυμμετρίαν appellauisset, quam indiuisibilium. Quod tamen, tanti viri, mihi olim noti, ac amici famæ detrahendi animo dictum, nullus credat; illum enim maximi semper feci, & veneratus sum; tam pulchrum verò ipsius inuentum conuenienti nomine appellatum non fuisse, mihi di-*

spli-

splicet; & si immutauero, nec ipse si viueret, molestè laturus esset, &c. Hic vt vides (amicè Lector) Bullialdus methodum indiuisibilium approbat, encomijsque extollit, quòd ad nostrum negotium facessit; solùm contendit haud concinè nomine expressam fuisse, ad quod infra. Omnes ergo allatos praeclarissimos geometras conuincit ratiocinatio per indiuisibilia, nullumque vidimus fateri non conuinci, nisi tres Iesuitas, Guldinum, Bettinum, & Tacquet; at quo spiritu ductos, ignoramus.

Assignat Tacquet rationem cur collectio per indiuisibilia non conuincat, & aliqua dicit, ad quae egregiè respondet Caualerius ipsemet. Duo autem tantùm considerabimus. Primum est, quod compositionem continui ex indiuisibilibus Tacquet omnino respuit; de ipsa enim sic loquitur. *Alterum* (subintellige, compositio continui ex indiuisibilibus) *cum geometria sic pugnat, vt nisi illud ipsa destruat, ipsam destrui, necesse sit.* Quamuis methodo indiuisibilium parum intersit coalescat continuum ex indiuisibilibus, necnè; & quamuis haud lubeat hic explicare propriam sententiam: nihilominus constanter asserimus, quod si ad approbandam methodum indiuisibilium necessariò requireretur coagmentatio continui ex indiuisibilibus, haec nobis ex ista methodo dumtaxat roborata, certissima esset. Methodus etenim comprobari debet ex proprijs, non ex alienis, ex fine suo, non ex extrinsecis. Methodi finis est veritatem gignere, ipsa perperam non

vten-

vtenti, veritas ſemper fulget; numquam caſus eſt reperibilis, quo errorem produxerit. Quid ergo amplius deſideratur? Offendit compoſitio ex indiuiſibilibus? Recipiatur hæc, & huius veritatis cognitio agnoſcatur tanquam huiuſce fæcundiſſimæ methodi ſoboles. At, vt diximus, falſum Tacquet ſupponit, dum putat Indiuiſibilium methodum perire, ablata compoſitione continui ex indiuiſibilibus. Minimè coaleſcat ex indiuiſibilibus continuum, nihilominus indiuiſibilium methodus inconcuſſa manet.

Secundum eſt, quod methodus præſens egregiè adſtruere videtur compoſitionem continui ex indiuiſibilibus. Cupimus Lectorem ſpeculari cauſam, cur in argumentatione, quam geometræ Archimedeam vocitant, neceſſariam omnimodè ſe præbeat ad impoſſibile deductio. Hæc autem facilis erit intuitu, conſideranti modum in ſimili argumentatione exercendum. Cupiamus oſtendere modo Archimedeo æqualitatem duorum corporum; nobis inſcribenda erunt, in præfatis corporibus, alia corpora, nimirum, vel cylindri, vel priſmata, &c. Oſtendendo vnicuique inſcripto in vno corpore, æquari aliud in alio corpore inſcriptum; vndè tandem colligemus, omnia corpora inſcripta in vno corpore, æquari omnibus in alio corpore inſcriptis. Verùm, quoniam iſthæc corpora in illis corporibus inſcripta, licet ſint partes illorum corporum, attamen, nequaquam ſunt omnes partes, minimeque

ſunt

ſunt partes aliquotæ, ſed aliquantæ, ideò ad colligendam æqualitatem inter ipſa corpora, deductio ad impoſſibile omninò neceſſaria conſpicitur. Secùs accideret ſi partes illæ & aliquotæ, & omnes eſſent. Statim enim probata ęqualitate omnium partium vnius corporis, cum omnibus alterius corporis partibus, clariſſima, directaque conſequentia, æqualitas corporum innoteſceret. Cur ergo raciocinario per indiuiſibilia ſemper eſt regia, ſemper directa? Non alia ſanè videtur aſſignabilis germana cauſa, niſi quia indiuiſibilibus vtendo, vtimur omnibus magnitudinum partibus. Hinc ergo oritur, quòd ſtabilita proportione, æqualitateuè inter ipſa omnia indiuiſibilia, ſtatim proportio, æqualitaſuè inter ipſas magnitudines, quarum indiuiſibilia ipſa omnes ſunt partes, eluceſcat. Hæc autem videtur innuere ipſe Bullialdus in loc. cit. dùm ait. *Debuerat Caualerius animaduertiſſe artificium eiuſmodi, aliud nihil eſſe, quam eiuſdem menſuræ, vel eiuſdem proportionis, per omnes duarum poſitarum magnitudinum partes, continuam, ſimilemque in infinitum applicationem.* Per indiuiſibilia fit vtique omnis applicatio, & in infinitum, & omnium (vt ita loquamur) partium, quæ nequaquam fit, diuiſibilia applicando; quia ſic, non fit omnium partium applicatio. Quanta autem veritate ſubiungat Bullialdus hæc verba. *Jta vt appoſitè magis illam excellentiſſimam methodum* ὁμοιοσυμμετρίαν *appellauiſſet, quam indiuiſibilium*, nobis non conſtat. Vtique methodo indiuiſibilium, fit applicatio per omnes partes, ſed

per

per quas partes, nisi per indiuisibiles? Non est enim, vniuersaliter verum, quòd supra ait Bullialdus. *Nulla enim quantitas continua est indiuisibilis*. Verùm enim est, si loquamur absolutè, minimè, respectiuè. Lineę, etenim, superficiesque sunt diuisibiles: illæ quidem secundum longitudinem, hæ autem secundum latitudinem etiam. Sed lineæ, ad superficiem relatæ, sunt indiuisibiles, iuxta diuisibilitatem peculiarem superficiei; superficies pariter ad corpora relatæ, sunt indiuisibiles secundum propriam corporum diuisibilitatem. Vnde omnes lineæ superficiei, omnesque superficies corporum, sunt omnia indiuisibilia immediata, illæ superficiei, hæ vero corporis. Quia ergo continua, & infinita applicatio est omnium indiuisibilium magnitudinis, in qua fit applicatio; rectè Caualerius hoc expræssit, suam methodum indiuisibilium, nuncupando. Sed ad Tacquet redeamus.

Qui in schol. proposit. 2. lib. 2. ait. *Cum theorema iàm geometricè demonstratum probare aggredior per heterogenea, in discursum incido, quo omnis illa argumentandi ratio, quam etiam supra negaui esse geometricam, erroris, & falsitatis argui videbatur*. Subiungit aliqua exempla, in quibus ex indiuisibilibus perperam adhibitis, falsum concluditur. Sed in illis identitas transitus adeò à Caualerio inculcata, nequaquam seruatur. Agnouit hoc, post plura profusa verba, ipsemet Tacquet, inquiens. *Respondeo nihilominus ad instantias hactenus allatas, in ijs non seruari æqualia indiuisibilium interualla*.

Nihi-

Nihilominus veritate perſpecta, & inneficatia obiectionum animaduerſa, Lappæ ad inſtar propriæ adhæret opinioni, indiuiſibilium methodum illegitimam, rationibus imbecillibus, & eneruibus cenſens. Quam verò irrationabiliter opinionem ſuam tueatur, oſtenſum fuit à Caualerio, locis ſupra citatis, & tactum fuit ſupra à nobis aliqualiter. Relinquamus ergo iſthæc, & ne quæſo ſimilibus nugis patientia tua (humaniſſimè Lector) amplius abutamur. Solùm cupimus admoneri, nos in hoc opere Te ſupponere in matheſi non modicè verſatum. Hinc factum eſt, nos quaſdam minutias haud curaſſe. Supponimus enim Te verſatum in doctrinis Euclidis, Apollonij, Archimedis, & aliorum. Qua propter conciſè aliquando locuti ſumus. Rogamus etiam, atque etiam Te, aliqua breuitati temporis condonare: totali enim libri compoſitioni, eiuſdemque impræſſioni nec annum conceſſimus. Hoc autem non irrationabiliter prodijt. Cauſam attamen huiuſce celeritatis haud licet in præſenti tibi aperire. Fruere his, alia expecta, præcipuè ſequenti anno, quo, Deo fauente, Tibi communicabimus nonnulla circa centrum grauitatis hyperbolæ, & circa aliqua ſolida ex ipſa genita, & forſitan tractatum de infinitis ſpiralibus. Vale.

FA-

FACVLTAS

Reuerendiſſimi Patris Generalis.

LAVDETVR IESVS CHRISTVS.

OPVS *inſcriptum*, De Infinitis Parabolis,&c. *compoſitum ab Admodum Reu. P. Stephano de Angelis Veneto profeſſo Noſtri Ordinis Jeſuatorum, ac in Prouincia Veneta Definitore, concedimus Typis demandari, dummodo habeat neceſſarias licentias, & approbationes, quæ de iure ſunt neceſſariæ &c. Jn quorum fidem præſentes manu propria ſubſcripſimus, ac proprio Noſtri Officij ſigillo muniuimus.*

Datum Brixiæ in Noſtro Monaſterio Corporis Chriſti, die quintadecima Januarij 1659.

Fr. Antonius Nouellus Gen. Ieſuat.

Locus Sigilli.

DE



DE INFINITIS PARABOLIS ETC.



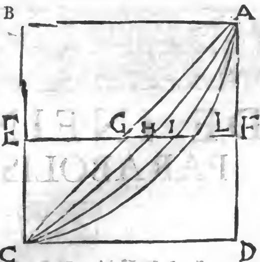
LIBER PRIMVS.



VM, eorum quæ in sequentibus pertractanda sunt, præcipua, principalisque pars versetur circa infinitas parabolas, peroptimum iudicauimus, naturam illarum, ante cætera, explicare. Quod licet egregiè præstitum sit ab eximio viro, præceptoreque nostro amantissimo Bonauentura Caualerio in suis exercitationibus geometricis exercit. 4. propos. 23. nihilominus, ipsum imitantes, optimum censemus hoc in loco idipsum repetere.

Esto ergo parallelogrammum quodcumque B D, in quo intelligantur ductæ A G C, A H C, A I C, A L C, aliæque infinitæ diagonales, hac lege, vt ducta vbicumque libuerit E F, parallela B A, diagonales ductas secante in G, H, I, L, &c. inuenia-

A tur



tur esse, vt D A, ad A F, sic C D, seù E F, ad F G; vt vero quadratum D A, ad quadratum A F, sic E F, ad F H; & vt cubus D A, ad cubum A F, ita E F, ad F I; vt autem quadratoquadratum D A, ad quadratoquadratum A F, sic E F, ad F L; & sic in infinitum ascendendo continuè per infinitas potestates. His explicatis, sit.

DEFINITIO PRIMA.

Triangulum B A C, duplicatum ad partes B A, vocetur prima parabola, seù parabola linearis. Spatium B A H C, duplicatum ad partes B A, vocetur secunda parabola, seù quadratica. B A I C, sic duplicatum, vocetur tertia parabola, seù cubica. B A L C, quadratoquadratica, & sic in infinitum; adeo vt omnia prædicta spatia vocentur infinitæ parabolæ.

D E-

DEFINITIO SECVNDA.

Pariter ſpatium CGAD, quod eſt triangulum, & quo deficit prima parabola à parallelogrammo, vocetur primum trilineum, ſeù lineare. CHAD, vocetur ſecundum trilineum, ſeù quadraticum. CIAD, cubicum. CLAD, quadratoquadraticum, & ſic in infinitum. Adeo vt omnia illa ſpatia vocentur infinita trilinea.

DEFINITIO TERTIA.

CGFD, quod eſt verum trapezium ordinarium, vocetur primum trapezium, ſeù lineare. CHFD, quadraticum. CIFD, cubicum. CLFD, quadratoquadraticum; & ſic in infinitum.

DEFINITIO QVARTA.

GAF, vocetur trilineum lineare ad verticem. HAF, trilineum quadraticum ad verticem, & ſic in infinitum.

DEFINITIO QVINTA.

A, dicatur vertex tùm infinitarum parabolarum, tùm infinitorum trilineorum omnium.

DEFINITIO SEXTA.

B A, dicatur diameter, ficuti C B, duplicata, bafis infinitarum parabolarum. C D, autem dicatur bafis infinitorum trilineorum, & infinitorum trapeziorum. A D, vero dicatur diameter infinitorum trilineorum, quia eft diameter eorundem duplicatorum.

Explicatio horum terminorum fuficiat in præfenti, nam reliqua congruentibus locis explicabuntur.

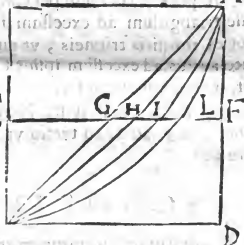
Verum antequam ad ipfas propofitiones deueniamus, notetur vnum principale, quod ex natura, genefique infinitarum parabolarum deducitur. Et eft, quod EF, FG, FH, FI, F L, & aliæ infinitæ, funt continuè proportionales. Hoc manifeftè patebit confideranti, vt dixi, genefim, ac naturam ipfarum. Nam cum, ex hypothefi, fit vt D A, ad A F, fic C D, feù E F, ad F G; & vt quadratum D A, ad quadratum A F; hoc eft, vt quadratum C D, feù E F, ad quadratum F G, fic E F, ad F H; ergo F G, erit media proportionalis inter E F, F H. Eodem modo difcurretur de cæteris. Imo cùm (vt probabimus inferius, quod etiam à nonnullis probatur) exceffus quantitatum continuè proportionalium in proportione maioris inęqualitatis, fint etiam in continua proportione totarum magnitudinum, fequitur etiam E G, G H, H I, I L, & cæteras

teras infinitas, esse continuè proportionales in proportione **EF**, ad **FG**. His ergo præmissis ad ipsas propositiones deueniamus.

PROPOSITIO PRIMA.

Parallelogrammum circumscriptum cuilibet trilineo, est ad ipsum, vt numerus exponentis trilinei vnitate auctus, ad ipsam vnitatem.

Consideretur schema supra explicatum. **Dico** parallelogrammum BD, esse ad quodlibet ex prædictis trilineis, vt numerus exponentis ipsius vnitate auctus, ad ipsam vnitatem. V. g. ad primum trilineum CAD, quod est triangulum, vt 2. ad 1. Ad secundum CHAD, vt 3. ad 1. Ad tertium, vt 4. ad 1. & sic in infinitum.



Hæc propositio ostenditur à Caualiero loco citato. Vbi etiam in corollario eiusdem proposit. ostendit per conuersionem rationis, parallelogrammum esse ad quamlibet ex infinitis parabolis,

lis, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. Nempe ad primam parabolam, quæ est triangulum, vt 2. ad 1. Ad secundam, vt 3. ad 2. Ad tertiam, vt 4. ad 3. & sic in infinitum.

SCHOLIVM I.

Cùm ergo triangulum CAD, sit dimidium parallelogrammi BD, erit ad quodlibet ex prædictis infinitis trilineis, vt dimidium numeri trilinei auctum dimidia vnitate, ad vnitatem; nempe, vt numerus trilinei auctus vnitate, ad binarium. Quare poterit concludi per conuersionem rationis, esse triangulum ad excessum ipsius supra quodlibet ex infinitis trilineis, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad excessum ipsius supra binarium; hoc est, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad numerum trilinei vnitate minutum. Nempe in secundo trilineo, vt 3. ad 1. In tertio vt 4. ad 2. & sic in infinitum.

SCHOLIVM II.

Quadraturam infinitorum trilineorum, & infinitarum parabolarum nobis patefecit Caualerius per auream methodum indiuisibilium. Quam quadraturam in præsenti libenter recipimus (quamuis forsitan & nos aliquando de ipsa aliquid dicemus); quia cum in hoc opere intelligamus incidenter ampliare

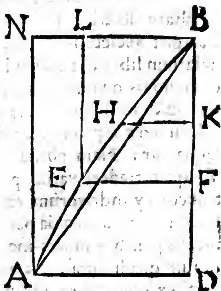
ampliare doctrinam, quam tradidit P. Andreas Tacquet Societatis Ieſu in ſuis cylindrorum,& annularium libris, oſtendendo ipſum mancum fuiſſe; quia nimis quam par erat cenſuit methodum Indiuiſibilium illegitimam; quadratura per indiuiſibilia haud nos prohibet,quin minus intentum conſequamur. Nam abſque Indiuiſibilibus poterat Tacquet tradere varias propoſitiones, & cubare truncos cylindricorum rectorum ſuper parabola varie reſectorum; quia parabolæ quadraticæ à geometris pluribus modis more antiquorum aſſignata fuit quadratura. Non ergo Tacquet reſpuet, quæ ex quadratura ordinariæ parabolæ dependent. Sed hæc clarius proprijs locis percipientur.

PROPOSITIO SECVNDA.

Si quælibet ex infinitis ſemiparabolis ſecetur linea baſi parallela. Portio ſemiparabolæ ad verticem, erit ſemi parabola eiuſdem gradus cum tota.

ESto quælibet ex infinitis ſemiparabolis ABD (quod enim oſtendetur de dimidia, intelligendum etiam venit de tota) cuius diameter BD, & in ipſa ſit ordinatim applicata EF. Dico EBF, eſſe ſemiparabolam eiuſdem gradus cum tota ABD. Sumatur inter F, B, vbilibet punctum K,

per



per quod ordinatim applicetur HK. Quoniam, ex natura infinitarum parabolarum supra explicata, est vt potestas EF, eiusdem gradus cum semiparabola, ad similem potestatem AD, sic BF, ad BD; pariterque est, vt potestas AD, ad similem potestatem HK, sic DB, ad BK. Ergo ex æquali, vt potestas EF, ad similem potestatem HK, sic FB, ad BK. At punctum K, sumptum est arbitrariè. Ergo EBF, erit semiparabola, & eiusdem gradus cum ABD. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Ex præsenti propositione possumus euidenter cognoscere, quod si semiparabolis, ABD, EBF, circumscribantur parallelogramma ND, LF, hæc erunt ad semiparabolas in eadem ratione, quia omnium parabolarum eiusdem gradus, est eadem quadratura. Eandem ergo rationem habebit parallelogrammum ND, ad semiparabolam ABD, quam parallelogrammum LF, ad semipara-

parabolam EBF. Ex quibus per conuerſionem rationis deducetur, eſſe ND, ad trilineum NBA, ſicuti LF, ad LBE, trilineum ad verticem, quod vtique erit eiuſdem gradus, cum trilineo NBA. Imo deducetur, quod cum ſit, vt totum parallelogrammum ND, ad totam ſemiparabolam ABD, ſic ablatum parallelogrammum LF, ad ablatam ſemiparabolam BEF, etiam reliquum, ad reliquum, erit vt totum, ad totum. Figura ergo LEFDAN, erit ad ſegmentum AEFD, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. Et diuidendo, erit ſegmentum trilinei NLEA, ad ſegmentum ſemiparabolæ AEFD, vt vnitas, ad numerum parabolæ; nempe in prima parabola, vt 1. ad 1. In ſecunda, vt I, ad 2. In tertia, vt 1. ad 3. & ſic in infinitum.

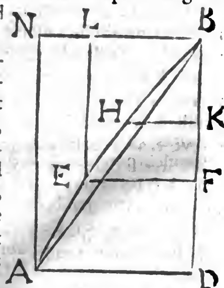
Pariter ſi ducantur EB, AB. Quoniam triangula EBF, ABD, ſunt dimidia parallelogrammorum ND, LF. Ergo tam ad ſemiparabolas ABD, EBF, quam ad portiones ipſarum AEBA, EHBE, erunt in eadem ratione.

PROPOSITIO TERTIA.

Si quælibet ex infinitis ſemiparabolis, ſecetur vt ſupra. Erit ſemiparabola tota, ad ſemiparabolam ad verticem, vt poteſtas baſis ſemiparabolæ vno gradu altior poteſtate parabolæ, ad ſimilem poteſtatem baſis ſemiparabolæ ad verticem.

Sint ergo data eadem, quæ in antecedente propositione. Dico ABD, esse ad EBF, vt potestas AD, vno gradu altior potestate parabolæ, ad similem potestatem EF. V.g. in prima parabola, nempe in triangulo, vt quadratum AD, ad quadratum EF. In secunda, quæ est parabola ordinaria, vt cubus AD, ad cubum EF. Et sic in infinitum.

Quoniam enim ex Scholio antec. parallelogrammum ND, est ad ABD, semiparabolam, vt LF, ad semiparabolam EBF. Ergo, & permutando, erit ND, ad LF, vt ABD, semiparabola, ad semiparabolam EBF. Sed ratio ND, ad LF, componitur ex ratione AD, ad EF, & ex ratione DB, ad BF; & vt DB, ad BF, sic potestas AD, eiusdem gradus cum parabola, ad similem potestatem EF. Ergo & ratio semiparabolæ, ad semiparabolam, componetur ex ijsdem rationibus Sed illæ duæ rationes componunt rationem potestatis AD, vno gradu altioris potestate parabolæ, ad similem potestatem EF. Quare patet propositum.



SCHO-

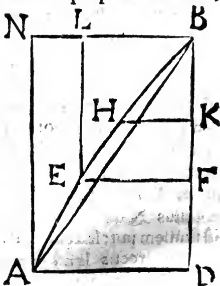
SCHOLIVM I.

Ex dictis facile possumus deducere, quod etiam si trilineum ANB, secetur LE, basi NA, parallela, erit trilineum NBA, ad trilineum LBE, vt potestas NB, diametri trilinei vno gradu altior potestate trilinei, ad similem potestatem LB. Etenim, cùm probatum sit, esse, sic tam totum ND, ad totum LF, quam ablatam semiparabolam ABD, ad ablatam EBF, sicuti potestas AD, seù NB, vno gradu altior potestate parabolæ, ad similem potestatem EF, seù LB. Ergo, & reliquum trilineum NBA, erit ad reliquum trilineum LBE, vt est totum, ad totum, nempe, vt est potestas NB, vno gradu altior potestate trilinei, ad similem potestatem LB. Imo ductis, vt factum est prius, rectis BE, BA, erit etiam segmentum AEBA, semiparabolæ, ad segmentum EHBE, in eadem ratione. Quia in eadem ratione, est tam tota semiparabola, ad totam semiparabolam, & ablatum triangulum ABD, ad ablatum triangulum EBF. Quàre, & reliquum segmentum, ad reliquum segmentum &c.

SCHOLIVM II.

Cùm autem prædictarum figurarum sit assignata ratio prædicta; nimirum, quod tam semiparabo-

la ad ſemiparabolam, quam ſegmentum, ad ſegmentum, & trilineum, ad trilineum, ſint, vt poteſtas AD, ſeù NB, vno gradu altior poteſtate parabolæ, ad ſimilem poteſtatem EF, ſeù LB; Et cum, vt talis poteſtas, ad talem poteſtatem, ita ſit AD, ad vltimum terminum proportionis AD, ad EF, ſic continuatæ, vt numerus proportionum ſuperet numerum parabolæ vnitate; numerus vero terminorum talium proportionum, excedat numerum parabolæ binario. Ergo, & ratio illarum figurarum, erit vt AD, ad illum vltimum terminum. V. g. in parabola cubica, continuata proportione AD, ad EF, in quatuor proportiones, & in quinque terminos, erit ſemiparabola, ad ſemiparabolam &c. vt AD, ad illum quintum terminum.

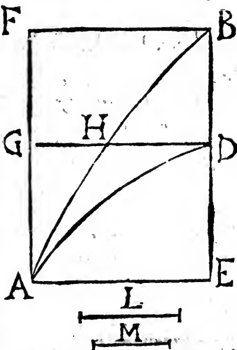


PROPOSITIO QVARTA.

Tam parabolæ eiuſdem gradus, quam trilinea eiuſdem gradus, quorum eadem baſis, ſunt ſimile, ad ſimile, in ratione diametrorum.

Sint

Sint duæ ſemiparabolæ ABE, ADE, eiuſdem gradus, quarum eadem baſis AE. Dico ABE, eſſe ad ADE, vt BE, ad ED. Circumſcribantur ipſis parallelogramma FE, GE. Quoniam ex dictis in propoſitione antecedenti, eſt vt FE, ad GE, ſic ABE, ad ADE; & vt FE, ad GE, ſic BE, ad ED. Ergo & vt BE, ad ED, ſic ſemiparabola ABE, ad ADE.



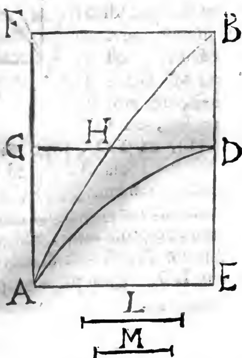
Sed ſupponamus ABE, ADE, eſſe trilinea eiuſdem generis, quorum eadem baſis AE. Eodem modo probabitur, eſſe trilineum ABE, ad trilineum ADE, vt diameter BE, ad diametrum ED. Quare patet propoſitum.

PRO-

PROPOSITIO QVINTA.

Si qualibet ſemiparabola ſecetur linea baſi parallela, & ſuper eadem baſi, & circa diametrum ſegmenti, conſtituatur alia ſemiparabola eiuſdem generis cum priori. Erit reſiduum totius ſemiparabolæ, dempta ab ea ſecunda ſemiparabola, ad ſemiparabolam ad verticem, vt baſis, ad parallelam ipſi ductam.

ESto ABE, ſemiparabola, cuius baſis AE, & ipſi vbilibet ſit acta HD, parallela, & intelligamus ADE, ſemiparabolam eiuſdem gradus, cum ABE. Dico reſiduum ABDA, eſſe ad HBD, vt AE, ad HD.



Ratio AE, ad HD, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ binario; & ſint vltimi termini L, M. Quoniam ex propoſ. ant. ABE, eſt ad ADE, vt BE,

ad

ad E D; Ergo per conuersionem rationis, & conuertendo, erit ABDA, ad ABE, vt BD, ad BE. Sed ex natura parabolæ, est vt BD, ad BE, sic potestas HD, eiusdem gradus cum parabola, ad similem potestatem AE; & vt talis potestas, ad talem potestatem, sic, ex dictis, vltima proportionalium proportionis AE, ad HD, continuatæ in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate, qui terminus, ex constructione, est L, ad AE. Ergo & vt L, ad AE, sic ABDA, ad ABE. At ABE, est ad HBD, ex scholio. 2. Propos. 3. vt AE, ad M. Ergo ex æquali, erit ABDA, ad HBD, vt L, ad M. Sed vt L, ad M, sic AE, ad HD. Quare patet propositum.

PROPOSITIO SEXTA.

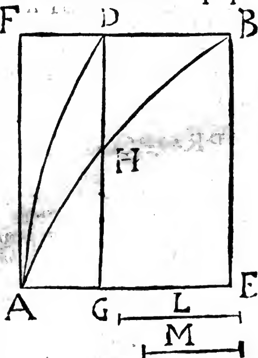
Si quodlibet trilineum secetur linea basi parallela, & super eadem basi constituatur trilineum circa diametrum trapezij eiusdem generis cum priori. Erit residuum totius, dempto à toto trilineo trilineo constituto, ad trilineum ad verticem, vt basis totius trilinei, ad ipsi actam parallelam.

TRilineum FBA, secetur DH, basi FA, parallela; & super base FA, & circa diametrum FD, sit constitutum aliud trilineum eiusdem generis cum trilineo FBA. Dico DBA, esse

esse ad trilineum ad verticem DBH, vt FA, basis trilinei FBA, ad DH.

Ratio FB, ad DB, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum trilinei binario; & sint duo vltimi termini L, & M.

Quoniam, ex Propos. 4. est FBA, ad FDA, vt BF, ad FD; Ergo per conuersionem rationis, & conuertendo, erit DBA, ad FBA, vt DB, ad BF. Sed ex scholio 2. propos. 3. est FBA, ad DBH, vt FB, ad vltimum terminum tot proportionalium in ratione continuata FB, ad BD, vt eorum numerus excedat numerum trilinei binario, qualis terminus est M. Ergo erit FBA, ad DBH, vt FB, ad M. Quare ex æquali, erit DBA, ad DBH, vt DB, ad M. At vt DB, ad M, sic FB, ad L; & vt FB, ad L, sic potestas FB, eiusdem gradus cum trilineo, ad similem potestatem DB; & vt talis potestas, ad talem



lem poteſtatem, ſic, ex geneſi parabolæ, GD, ſeù AF, ad DH. Ergo & vt AF, ad DH, ſic DBA, ad DBH. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO SEPTIMA.

Si quotlibet magnitudines, ſint continuè proportionales in proportione maioris inæqualitatis. Erunt etiam illarum exceſſus continuè proportionales in eadem proportione totarum magnitudinum.

HÆc propoſitio ab alijs etiam oſtenditur. Sint ergo quotcumque magnitudines AB, BC, BD, BE, continuè proportionales. Dico, etiam illarum differentias AC, CD, DE, eſſe continuè proportionales in eadem proportione AB, ad BC. Quoniam enim, per hyppotheſim, eſt vt tota AB, ad totam BC, ſic ablata BC, ad ablatam BD. Ergo & reliqua AC, erit ad reliquam CD, vt tota AB, ad totam BC. Idem de reliquis eodem modo concludetur. Quare patet propoſitum.

SCHOLIVM.

Ex dictis etiam obſeruetur, quod ſi ſint quot-

cumque magnitudines continuè proportionales, erit differentia inter primam, & vltimam, æqualis omnibus differentijs; nempe primæ, & secundæ; secundæ, & tertiæ; & sic deinceps. A E, enim, quæ constat ex differentijs harum proportionalium, est excessus A B, supra B E.

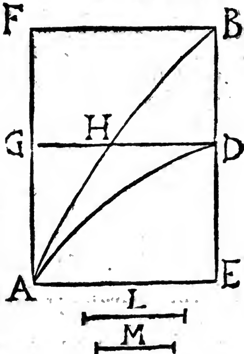
PROPOSITIO OCTAVA.

Si semiparabola cuiuscumque generis secetur linea basi parallela; & super eadem basi, & circa diametrum segmenti, sit alia semiparabola, vt dictum est in Propos. 5. Erit segmentum, ad semiparabolam quam includit, vt tot continuè proportionales, in ratione basis, ad actam parallelam, & quarum prima, sit dicta basis, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad has proportionales, vltima minori excepta. Ad parallelogrammum vero sibi circumscriptum, vt idem antecedens, ad consequens, quod ad primum consequens prædictum, sit vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ.

A B E, semiparabola qualibet, secetur ordinatim applicata H D, & super basi A E, sit alia semiparabola A D E, eiusdem gradus cum priori, cui sit circumscriptum parallelogrammum G E. Dico segmentum A H D E, esse ad A D E, vt tot proportionales, in ratione A E, ad H D, quarum prima maior, sit A E, quotus est numerus

para-

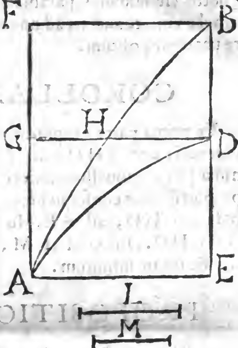
parabolæ vnitate auctus, ad has easdem proportionales, vltima minori excepta. V. g. in parabola lineari, vt duæ AE, HD, ad AE. In quadratica, vt tres AE, HD, cum tertia L, ad duas AE, HD. In cubica, vt AE, HD, L, & M, ad AE, HD, & L. Et sic in infinitum. Pariter AHDE, erit ad parallelogrammum GE, vt idem antecedens, ad consequens, quod ad consequens prius inuentum, sit vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. V. g. in prima parabola, erit trapezium AHDE, ad parallelogrammum GE, vt duæ AE, HD, ad duplam AE. In quadratica, vt AE, HD, & L, ad sesquialteram ipsarum AE, HD. In cubica, vt AE, HD, L, & M, ad sesquitertiam AE, HD, & L, simul. & sic in infinitum.



Continuetur ratio AE, ad HD, in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ binario; sintque vltimi minimi termini L, & M.

Quoniam ergo, ex ſcholio 2. propoſ. 3. eſt ſemiparabola ABE, ad HBD, vt AE, ad M. Ergo per conuerſionem rationis, & conuertendo, erit ſegmentum AHDE, ad ABE, vt exceſſus AE, ſupra, M, ad ipſam AE. Verum, quoniam vt EB, ad BD, ſic poteſtas AE, eiuſdem gradus cum parabola, ad ſimilem poteſtatem HD; & vt talis poteſtas AE, ad poteſtatem HD, ſic AE, ad penultimam proportionalem inuentam, nempe ad L. Ergo & per conuerſionem rationis, vt BE, ad ED, ſic AE, ad exceſſum ipſius ſupra L. Sed ex propoſ. 4. vt BE, ad ED, ſic ſemiparabola ABE, ad ſemiparabolam ADE. Ergo & ABE, erit ad ADE, vt AE, ad exceſſum ipſius ſupra L. Cùm autem etiam probatum ſit, eſſe AHDE, ad ABE, vt exceſſus AE, ſupra M, ad AE. Ergo ex æquali, erit AHDE, ad ADE, vt exceſſus AE, ſupra M, ad exceſſum AE, ſupra L. At exceſſus AE, ſupra M, æquatur, ex ſchol. propoſ ant. omnibus exceſſibus, qui tot ſunt, quotuſ eſt numerus parabolæ vnitate auctus (quia omnes termini proportionis excedebant numerum parabolæ binario, & ſolus vltimus terminus alium non excedit) & exceſſus AE, ſupra L, continet tot exceſſus, quotus eſt numerus parabolæ; & exceſſus magnitudinum continuè proportionalium, ſunt proportionales continuè in eadem proportione cum totis magnitudinibus ex propoſ. ant. vnde vt exceſſus AE, ſupra M, ad exceſſum AE, ſu-
pra

pra L, sic AE, HD, & cæteræ tot proportionales, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad AE, HD, & cæteras tot proportionales, quotus est numerus parabolæ. Ergo AHDE, erit ad ADE, vt AE, & cæteræ tot proportionales, quotus est numerus parabolæ vnitates auctus, ad has easdem proportionales, vltimo minori termino excepto.



Secunda pars propositionis, patebit faciliter. Cum enim, ex proposit. 1. sit ADE, ad GE, vt numerus parabolæ, ad numerum parabolæ vnitate auctum; nempe vt AE, HD, cum cæteris tot proportionalibus, quotus est numerus parabolæ, ad magnitudinem, quæ ad ipsas sit, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. Ergo ex æquali, erit AHDE, ad GE, vt AE, & cæteræ tot proportionales, quarum numerus excedat numerum parabolæ vnitate, ad magnitudinem, quæ ad AE, cum tot cæteris proportionalibus,

quotus

quotus est numerus parabolæ, fit vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. Quare patet propositum.

COROLLARIVM.

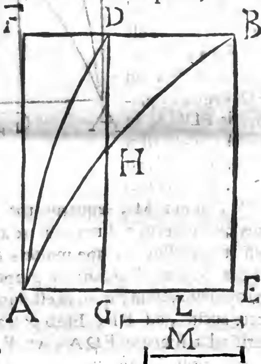
Ex prima parte propositionis infertur, quod diuidendo, erit AHD, ad ADE, vt vltima minima proportionalium antecedentium, ad easdem proportionales consequentes. V.g in prima parabola, vt HD, ad AE. In secunda, vt L, ad AE, HD. In tertia vt M, ad AE, HD, & L. Et sic in infinitum.

PROPOSITIO NONA.

Si quodlibet ex infinitis trilineis secetur, vt dictum est in propos. 6.; & fiant eadem, quæ ibidem. Erit trapezium ad trilineum à se inclusum, vt tot proportionales in ratione diametri trilinei, ad diametrum trilinei ad verticem, quarum prima maior sit diameter trilinei, quotus est numerus trilinei vnitate auctus, ad diametrum trilinei. Ad parallelogrammum vero sibi circumscriptum, vt idem antecedens, ad tot diametros totius trilinei, quotus est numerus trilinei vnitate auctus.

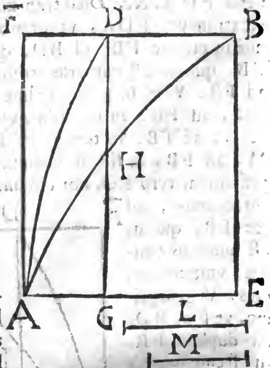
IN schemate propos. 6. Esto trilineum FBA, cuius basis FA, cum alio trilineo eiusdem generis

neris F D A. &c. Dico trapezium F D H A, esse ad trilineum F D A, vt tot proportionales continuè in ratione F B, ad B D, quarum maxima sit F B, quotus est numerus trilinei vnitate auctus, ad F B. V. g. In primo trilineo, vt F B, cum B D, ad F B. In secundo, vt F B, cum B D, & L, ad F B. In tertio, vt F B, B D, L, & M, ad F B. & sic in infinitum. Ad parallelogrammum vero F G, sibi circumscriptum, vt idem antecedens, ad tot F B, quotus est numerus trilinei vnitate auctus. V. g. in primo, vt F B, B D, ad duplam F B. In secundo, vt F B, B D, & L, ad triplam F B. In quarto, vt F B, B D, L, & M, ad quadruplam F B. & sic in infinitum.



Continuetur, vt factum est in propos. ant. Ratio F B, ad B D, in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum trilinei binario, & sint duo vltimi termini, L, M. Quoniam

niam ergo, ex Sch. 2. proposit. 3. est FBA, ad DBH, vt FB, ad M. Ergo per conuersionem rationis, & conuertendo, erit trapezium FDHA, ad FBA, vt excessus FB, supra M, ad FB. At FBA, est ad FDA, ex proposi. 4. vt FB, ad FD. Ergo ex æquali, erit FDHA, ad FDA, vt excessus FB, supra M, ad FD. At excesus FB, supra M, æquatur tot excessibus, quotus est numerus trilinei vnitate auctus; & FD, est vnicus excessus, nempe maior; & vt excessus FB, supra M, ad FD, sic ex proposi. 7. tot illarum proportionalium, quotus est numerus trilinei vnitate auctus, ad FB. Ergo & trapezium FDHA, erit ad trilineum FDA, vt FB, & cæteræ tot proportionales, quotus est numerus trilinei vnitate auctus, ad FB. Vnde patet prima pars.



Secunda pars sic probabitur. Cum enim, ex proposi. prima, sit trilineum FDA, ad FG, vt vnitas

vnitas ad numerum trilinei vnitate auctum; nempe vt FB, ad tot FB, quotus est numerus trilinei vnitate auctus. Ergo ex æquali patebit propositum.

COROLLARIVM.

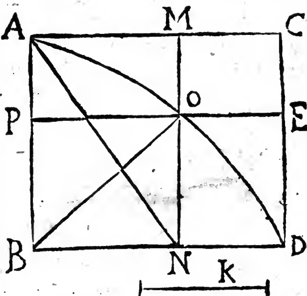
Ergo ex prima parte, erit diuidendo, ADH, ad AFD, vt illæ proportionales, FB, excepta, ad ipsam FB. V. g. in primo, vt DB, ad FB. In secundo, vt DB, cum L, ad FB. In tertio vt DB, L, & M, ad FB. & sic in infinitum.

PROPOSITIO DECIMA.

Si quælibet semiparabola cum sibi circumscripto parallelogrammo secetur linea diametro parallela. Erit parallelogrammum circumscriptum segmento ad diametrum, ad ipsum segmentum, vt tot bases semiparabolæ, quotus est numerus ipsius vnitate auctus, ad excessum ipsarum supra vltimam minorem proportionalem, si proportio basis semiparabolæ, ad interceptam inter diametrum, & ipsi ductam parallelam, continuetur in tot terminos, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus.

SEmiparabola ADB, cum sibi circumscripto parallelogrammo BC, secetur MN, dia-

metro AB, parallela; & ratio DB, ad BN, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate; sitque vltimus terminus K. Assero parallelogrammum MB, esse ad segmentum AONB, vt tot BD, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum ipsarum supra K. Ducatur OP, parallela BD. Quoniam enim BM, est ad PM, vt BA, ad AP; nempe ex natura parabolæ, vt potestas BD, eiusdem gradus cum parabola, ad similem potestatem PO;



nempe vt BD, ad K; & vt BD, ad K, sic BD, accepta secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad tot numero K. Ergo & BM, erit ad PM, vt BD, accepta secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad tot numero K. Sed ex quadratura infinitorum trilineorum, PM, est ad trilineum AMO, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad vnitatem; nempe vt K, accepta secundum

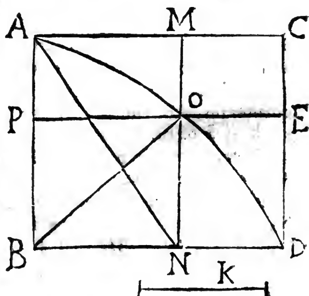
cundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad K, semel acceptam. Ergo ex æquali, erit BM, ad trilineum AMO, vt BD, accepta secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad k. Quare & per conuersionem rationis, erit BM, ad segmentum AONB, vt tot BD, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum ipsarum supra k.

SCHOLIVM I.

Ex dictis ergo potest concludi, quod in parabola quadratica, erit BM, ad AONB, vt tripla DB, ad duplam BD, cum excessu DB, supra k, quæ sit tertia proportionalis ipsarum DB, BN; & subtriplando terminos, quod erit vt DB, ad subsesquialteram DB, cum tertia parte excessus DB, supra k; quæ tertia pars excessus, æquatur tertiæ parti DN, & tertiæ parti excessus BN, supra k. Cum ergo subsesquialtera DB, nempe duæ tertiæ partes DB, æquentur duabus tertijs partibus DN, & duabus tertijs partibus BN; ergo BM, erit ad AONB, vt BD, ad ND, cum duabus tertijs partibus BN, & cum tertia parte excessus BN, supra k.

SCHOLIVM II.

Sed & aliam rationem B M, ad A O N B, licet vniuerſaliter colligere. Nempe, quod ſit, vt tot A B, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot A B, quotus eſt numerus parabolæ, ſimul cum P B, ſeù N O. Quod eſt euidens; quia B M, eſt ad P M, vt B A, ad A P; nempe vt B A, accepta ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad tot numero A P. Parallelogrammum vero P M, eſt ad trilineum A M O, vt tot A P, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad A P. Ergo ex æquali, & per conuerſionem rationis, erit



B M, ad A O N B, vt B A, accepta ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad exceſſum ſupra A P; nempe ad tot B A, quotus eſt numerus parabolæ, ſimul cum B P.

SCHO-

SCHOLIVM III.

Ex superiori Scholio licet colligere in parabola quadratica, BM, esse ad AONB, vt tripla BA, ad duplam BA, cum BP, seù NO; nempe subtriplando terminos, vt BA, ad duas tertias partes BA, cum tertia parte BP, seù NO. Imo ex dictis licet colligere quandam proprietatem parabolæ cuiuscumque, quam licet iudicemus parum, aut nihil sequentibus inseruire, attamen nobis videtur pulcherrima scitu. Proprietas autem est. Quod.

PROPOSITIO XI.

In segmento antecedentis propositionis, tot triangula ABN, quotus est numerus parabolæ, cum vno triangulo ONB, sunt ad segmentum AONB, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad binarium.

QVoniam enim ex dictis, BM, est ad AONB, vt AB, accepta secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad eandem AB, acceptam secundum numerum parabolæ, cum NO; vt vero tot AB, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot AB, quotus est numerus parabolæ, vna cum NO, sic tot triangula ANB, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot

tot triangula ANB, quotus eſt numerus parabolæ, ſimul cum triangulo OBN. Ergo, & vt tot triangula ABN, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot talium triangulorum, quotus eſt numerus parabolæ, cum triangulo OBN, ſic BM, ad AONB. Ergo & permutando, vt tot triangula ANB, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad BM; nempe ad duplum triangulum ANB; nempe vt numerus parabolæ auctus vnitate, ad binarium, ſic tot triangula ANB, quotus eſt numerus parabolæ, cum triangulo OBN, ad ſegmentum AONB. Quod &c.

SCHOLIVM.

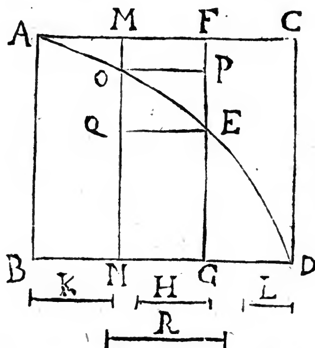
Ex quibus licet notare, quod in parabola quadratica dumtaxat, illa triangula, ad ſegmentum retinent ſemper eandem rationem, quam habet parallelogramum BC, ad ſemiparabolam; nempe talia triangula, ſunt ſegmenti ſeſquialtera, vt conſideranti patet.

PROPOSITIO XII.

Si quælibet ſemiparabola, cum ſibi circumſcripto parallelogrammo, ſecetur duabus lineis diametro parallelis: Parallelogrammum inter has contentum, erit ad ſegmentum ſemiparabolæ, quod includit, vt tot baſes ſemiparabolæ, quotus eſt numerus ipſius vnitate auctus, ad

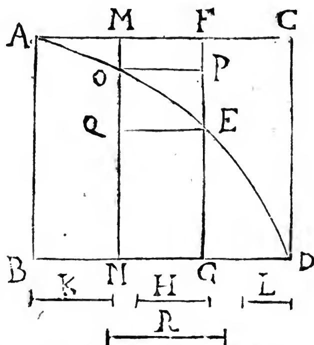
exceſſum

excessum ipsarum supra tot numero continuè proportionales in ratione intercepta inter diametrum, & parallelam ab ipsa remotiorem, ad interceptam inter diametrum, & parallelam proximiorem, quarum prima maior sit altera proportionalium in ratione basis semiparabolæ, ad interceptam inter diametrum, & parallelam ab ipsa remotiorem, vt earum numerus superet numerum parabolæ vnitate.



BC, ergo parallelogrammum, cum sibi inscripta semiparabola, secetur MN, FG, diametro AB, parallelis; & ratio DB, ad BG, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum exce-

excedat numerum parabolæ vnitate, sitque vltimus terminus minimus k; fiat autem vt GB, ad BN, sic k, ad H; quæ ratio continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate; sitque vltimus minimus termi-



nus L. Dico NF, esse ad OEGN, vt tot BD, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum ipsarum sup a k, H, & cæteras tot proportionales, quot sunt ipsæ. Ducatur EQ, parallela NG. Quoniam enim NF, est ad QF, vt GF, ad FE; nempe ex genesi parabolæ, vt potestas DB, congruens parabolæ, ad similem potesta-

poteſtatem BG; nempe vt DB, ad k; nempe vt DB, accepta ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad tot numero k. Pariterque conuertendo, ex ſecunda parte propoſ. 9. eſt QF, ad trapezium MFEO, vt tot FA, ſeù GB, quotus eſt numerus ipſius vnitate auctus, ad tot numero continuè proportionalium in ratione FA, ad AM, ſeù GB, ad BN; nempe vt tot k, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad k, H, & cæteras tot proportionales quot ſunt ipſæ (factum eſt enim ſupra, vt GB, ad BN, ſeù FA, ad AM, ſic k, ad H. &c.) Ergo ex æquali, erit NF, ad trapezium MFEO, vt tot DB, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad k, H, & cæteras tot proportionales quot ſunt ipſæ. Quare per conuerſionem rationis, erit NF, ad ſegmentum OEGN, vt tot DB, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad exceſſum ipſarum ſupra k, H, & cæteras. Quod &c.

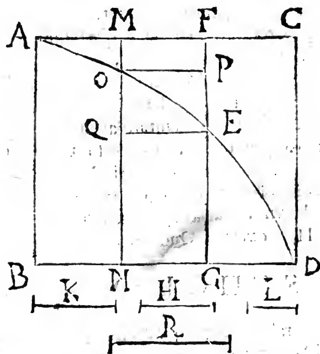
SCHOLIVM I.

In parabola ergo quadratica, erit NF, ad OEGN, vt tripla DB, ad exceſſum ſupra tres k, H, L.

SCHOLIVM II.

Sed & aliam rationem parallelogrammi NF, ad

ſegmentum OEGN, poſſumus in parabola quadratica aſſignare; nimirum quod ſit, vt quadratum DB, ad rectangulum BDG, cum rectangulis BGD, BNG, & cum duabus tertijs partibus quadrati NG. Cum enim parallelogrammum NF, ſit ad QF, vt GF, ad FF; nempe vt quadratum DB, ad quadratum BG; nempe vt triplum

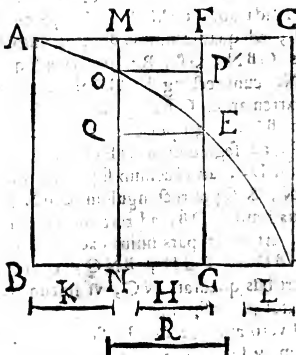


quadratum DB, ad triplum quadratum BG. Pariterque ſit, vt ſupra dictū eſt, QF, ad trapezium MFEO, vt tripla GB, ad GB, BN, & R; (tertiam minorem proportionalem GB, BN) nempe ducendo omnia in BG, vt triplum quadratum BG, ad quadratum

BG,

BG, cum rectangulis GBN, GB, R. Ergo ex æquali, erit NF, ad trapezium MFEO, vt triplum quadratum DB, ad quadratum GB, cum duobus rectangulis GBN; GB, R; nempe ad quadrata GB, BN, cum rectangulo GBN; quia rectangulum extremarum GB, R, est æquale quadrato mediæ BN. Ergo per conuersionem rationis, erit NF, ad segmentum OEGN, vt triplum quadratum DB, ad excessum supra duo quadrata GB, BN, & supra rectangulum GBN; nempe vt quadratum DB, ad tertiam partem huius excessus. At tertia pars huius excessus, sunt rectangula BDG, BGD, BNG, cum duabus tertijs partibus quadrati NG, vt statim patebit. Quare patet propositum.

Quod vero assumptum est, sic patebit. Nam quadratum BD, excedit quadratum BG, rectangulis BDG, BGD. Pariter quadratum BD, excedit quadratum BN, rectangulis BND, BDN. Idemque quadratum BD, excedit rectangulum GBN, rectangulis BGD, BDG, & BGN. Vnde totus talis excessus, æquabitur duobus rectangulis BDG, duobus BGD, & rectangulis BDN, BND, BGN. At rectangulum BDN, æquatur rectangulis BDG, & BD, NG; quod rectangulum BD, NG, æquatur rectangulis NGD, BNG, & quadrato NG. Ergo rursum colligendo, prædictus excessus æquabitur tribus rectangulis BDG, duobus BGD,



& rectangulis BND, BGN, NGD, BNG, & quadrato NG. Pariter rectangulum BND, æquatur rectangulis BNG; BN, GD; & duo rectangula BN, GD; NGD, faciunt rectangulum BGD. Ergo denuo colligendo, prædictus excessus æquabitur tribus rectangulis BDG, tribus BGD, duobus BNG, rectangulo BGN, & quadrato NG. Sed pariter rectangulum BGN, æquatur rectangulo BNG, & quadrato NG. Ergo à primo ad vltimum, prædictus excessus æquatur tribus rectangulis BDG, tribus BGD, tribus BNG, & duobus quadratis NG. Quorum

tertia

tertia pars erunt rectangula BDG, BGD, BNG, & duæ tertiæ partes quadrati NG. Quare &c.

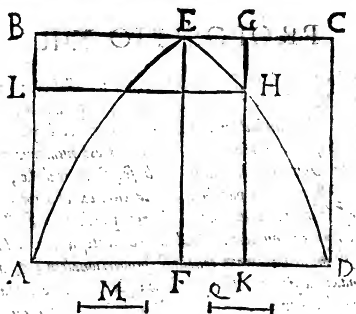
PROPOSITIO XIII.

Si cuilibet parabolæ sit circumscriptum parallelogrammum, quod cum ipsa secetur linea diametro parallela. Erit pars ipsius includens maiorem portionem, ad ipsam, vt tot bases prædictæ portionis, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot bases semiparabolæ, quotus est numerus parabolæ, vna cum excessu tot interceptarum inter diametrum, & parallelam ductam, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, supra vltimam minimam continuè proportionalem; quarum maxima sit basis semiparabolæ; secunda intercepta inter diametrum, & parallelam ductam; & quarum numerus excedat numerum parabolæ binario.

ESto quælibet parabola AED, cum sibi circumscripto parallelogrammo BD, quod cum ipsa secetur Gk, EF, diametro parallela; & ratio AF, ad Fk, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ binario; sintque duo vltimi minimi termini M, & Q. Dico parallelogrammum Bk, esse ad portionem maiorem AEHk, vt Ak, accepta secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad AF, acceptam secundum numerum parabolæ, vna cum

ex-

excessu, tot Fk, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, supra vnicam Q.



Quoniam enim parallelogrammum BK, est ad parallelogrammum GF, vt Ak, ad kF; nempe vt Ak, accepta secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad tot numero Fk; parallelogrammum autem GF, est ad segmentum EHKF, ex propos. 10. vt tot AF, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum ipsarum supra M; nempe vt tot FK, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum ipsarum supra Q. Ergo ex æquali, erit BK, ad EHKF, vt AK, accepta secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad excessum tot numero Fk, supra Q.

Rursum

Rurſum, eodem modo probabitur, kB, eſſe ad BP, vt KA, accepta ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad tot numero AF. Sed BF, eſt ad ſemiparabolam AEF, vt AF, accepta ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad eandem, acceptam ſecundum numerum parabolæ. Quare rurſum ex æquali, erit Bk, ad ſemiparabolam, vt Ak, accepta ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad AF, acceptam ſecundum numerum parabolæ. Ergo colligendo ambo conſequentia, erit BK, ad portionem maiorem AEHk, vt Ak, accepta ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad AF, acceptam ſecundum numerum parabolæ, vna cum exceſſu tot FK, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ſupra Q. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

In parabola, ergo quadratica erit BK, ad AEHK, vt tres KA, ad duas AF, cum exceſſu trium Fk, ſupra Q.

PROPOSITIO XIV.

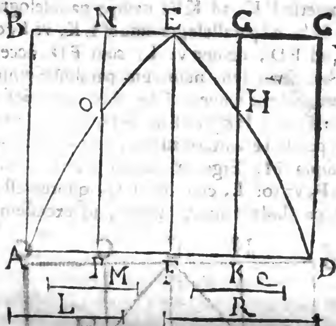
Si parallelogrammum cum portione anteced. propoſit. ſecetur alia linea diametro parallela, adeo vt duæ parallelæ includant diametrum. Erit parallelogrammum

inter

inter parallelas contentum, ad segmentum parabolæ, quod comprehendit, vt linea, ad quam basis semiparabolæ habeat eam proportionem, quam habet vna interceptarum inter vnam parallelarum, & diametrum, ad aliam, vna cum basi semiparabolæ, acceptis ambabus secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad magnitudinem constantem ex duabus magnitudinibus; quarum vna, sit excessus tot basium semiparabolæ, quotus est numerus ipsius vnitate auctus, supra vltimam minorem proportionalem, quarum numerus excedat numerum parabolæ vnitate, & quarum maxima sit basis semiparabolæ; Secunda intercepta illa inter diametrum, & parallelam, quæ erat antecedens primæ proportionis: Alia verò magnitudo sit illa, ad quam consequens proportionis basis semiparabolæ, in ratione interceptarum inter parallelas, & diametrum, accepta secundum numerum parabolæ vnitate auctum habeat eam proportionem, quam habet basis semiparabolæ accepta secundum numerum ipsius vnitate auctum, ad excessum supra vltimam minorem proportionalem, quarum numerus excedat numerum parabolæ vnitate; & quarum maxima sit basis semiparabolæ; Secunda vero illa intercepta inter diametrum, & parallelam, quæ erat consequens primæ proportionis.

PORtio maior AEHK, cum sibi circumscripto parallelogrammo Bk, secetur NOP, EF, parallela, adeo vt NP, Gk, includant diametrum EF; fiat autem, vt kF, ad FP, sic FD,

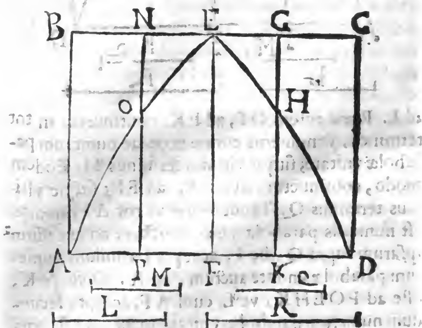
ad



ad L. Ratio autem D F, ad F K, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate; sitque vltimus terminus M. Eodem modo, continuetur ratio A F, ad F P; sitque vltimus terminus Q. Tandem fiat vt tot A F, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum ipsarum supra Q, sic L, accepta secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad R. Dico N K, esse ad P O E H K, vt L, cum A F, acceptæ secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad R, vna cum excessu tot A F, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, supra M.

Quoniam enim ex constructione, conuertendo, est vt P F, ad F K, sic L, ad F D. Ergo componendo,

nendo, erit PK, ad KF; nempe parallelogrammum Nk, ad parallelogrammum EK, vt L, cum FD, ad FD; nempe vt L, cum FD, acceptis ambabus secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad tot numero FD. Sed ex propos. 10. EK, est, ad EHkF, vt tot FD, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum ipsarum supra M. Ergo ex æquali, erit Nk, ad EHkF, vt tot L, cum tot FD, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum tot



numero FD, supra M. Rursum eodem modo probabimus, esse parallelogrammum kN, ad parallelogrammum NF, vt tot DF, cum tot L, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot

numero

numero L. At NF, est ad POEF, vt tot AF, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum ipsarum supra Q; nempe vt tot L, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad R (factum est enim supra, vt tot AF, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum ipsarum supra Q, sic tot L, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus ad R.) Ergo rursum ex æquali, erit Nk, ad POEF, vt FD, cum L, acceptis ambabus secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad R. Quare colligendo omnia consequentia, erit Nk, ad POEHk, vt tot L, cum tot FD, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad R, simul cum excessu tot FD, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus supra M. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Deducemus ergo ex dictis, quod in parabola quadratica, erit Nk, ad POEHk, vt tres L, cum tribus FD, ad duas FD, cum kD, & cum excessu FK, supra M, vna cum R; & subtriplando terminos, vt L, cum FD, ad DK, cum duabus tertijs partibus FK, & cum tertia parte excessus ipsius supra M, vna cum tertia parte R.

PROPOSITIO XV.

Si semiparabola quæcumque secetur linea diametro parallela, & portioni ipsius, quæ est minor totius parabolæ, circumscribatur parallelogrammum. Hoc erit ad portionem, quam includit, vt tot continuè proportionales, in ratione basis semiparabolæ, ad interceptam inter diametrum, & parallelam ductam, quarum maxima sit basis semiparabolæ, quotus est numerus parabolæ; & hæ tot vicibus acceptæ, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad easdem proportionales sic acceptas, vt basis semiparabolæ accipiatur secundum numerum parabolæ; Secunda, secundum numerum vnitate minorem; & sic deinceps.

ESto semiparabola BAD, quæ sit secta NO, diametro AB, parallela; & segmento OND, sit circumscriptum parallelogrammum NE. Dico NE, esse ad OND, vt tot in proportione DB, ad BN, quarum maxima sit DB, secunda NB, quotus est numerus parabolæ; & hæ, tot vicibus acceptæ, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad has easdem proportionales; sed sic acceptas, vt DB, accipiatur secundum numerum parabolæ; BN, secundum numerum parabolæ vnitate minorem; & sic deinceps. V. g. in prima, vt dupla DB, ad DB. In secunda, vt tripla DB, cum tripla BN, ad duplam DB, cum vnica BN.

In

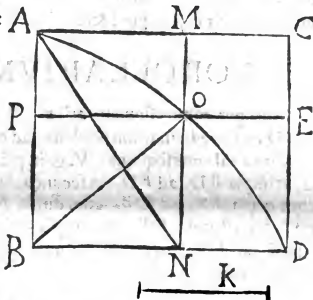
In tertia, vt quadrupla DB, quadrupla BN, & quadrupla k (si hæc sit tertia proportionalis minor ipsarum DB, BN,) ad triplam DB, duplam BN, & vnicam k. Et sic in infinitum.

Semiparabolæ circumscribatur parallelogrammum BC; & NO, producatur vsque ad M; & ratio CA, ad AM, seù DB, ad BN, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate; sitque vltimus minimus terminus k. Quoniam, ex genesi parabolarum, est vt NM, ad MO, sic potestas CA, seù DB, congruens parabolæ, ad similem potestatem MA, seù NB; nempe sic DB, ad k. Ergo & per conuersionem rationis, erit MN, ad NO; nempe parallelogrammum MD, ad parallelogrammum NE, vt DB, ad excessum ipsius supra k. Et conuertendo, erit NE, ad NC, vt excessus BD, supra k, ad BD, nempe vt talis excessus tot vicibus

bus acceptus, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot numero DB. At, ex secunda parte propos. 9. conuertendo, NC, est ad trapezium MCDO, vt tot CA, seù DB, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot numero continuè proportionales in ratione CA, ad AM, seù DB, ad BN, quarum maxima sit DB; vnde per conuersionem rationis, est NC, ad NOD, vt illæ tot DB, ad excessum ipsarum supra illas proportionales. Ergo ex æquali, erit NE, ad NOD, vt tot excessus DB, supra K, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum tot DB, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, supra DB, BN, & cæteras tot proportionales, quot sunt ipsæ. At ex scholio propos. 7. excessus DB, supra k, æquatur omnibus excessibus ipsarum proportionalium, qui sunt tot numero, quotus est numerus parabolæ; vnde excessus DB, supra K, tot vicibus acceptus, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, æquatur tot vicibus omnibus excessibus; Pariterque excessus tot DB, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, supra DB, BN, & cæteras tot proportionales, quot sunt ipsæ, æquatur omnibus excessibus, tot vicibus, quotus est numerus parabolæ; omnibus excessibus à primo, tot vicibus, quotus est numerus parabolæ vnitate minus; alijs excessibus à primo, & secundo, tot vicibus, quotus est numerus parabolæ binario minutus, & sic deinceps. Ergo

NE,

NE, erit ad OND, vt excessus omnes, tot vicibus accepti, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum DB, supra BN, acceptum secundum numerum parabolæ; cum excessu BN, supra K, accepto secundum numerum parabolæ vnitate minutum;& sic deinceps. Verum ex præcitata propofit. 7. excessus magnitudinum cōtinuè proportionaliū, sunt in proportione cōtinua eiusdem rationis



cum proportione totarum magnitudinum; vnde est, vt excessus DB, supra K, acceptus secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad prædictos excessus, sic DB; BN, & cæteræ continuè tot proportionales, quotus est numerus parabolæ, acceptæ secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad DB, acceptam secundum numerum parabolæ; cum BN, accepta secundum numerum parabolæ vnitate minutum; cum K, accepta secundum numerum parabolæ binario minutum; & sic deinceps. Ergo

& NE,

& N E, erit ad O N D, vt D B, B N, & cæteræ tot proportionales secundum numerum parabolæ, & hæ acceptæ secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad easdem proportionales sic acceptas, vt D B, accipiatur secundum numerum parabolæ; B N, secundum numerum parabolæ vnitate minutum; & sic deinceps. Quod &c.

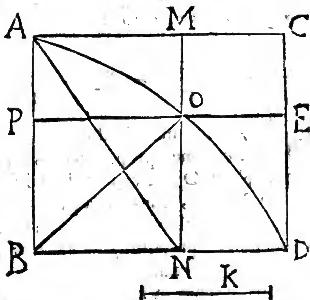
COROLLARIVM.

Ergo per conuersionem rationis, N E, erit ad O E D, vt prędictum antecedens, ad excessum ipsius supra tale consequens. V.g. in prima parabola, vt dupla B D, ad B D. In secunda, vt tripla D B, cum tripla B N, ad D B, cum dupla B N. In tertia, vt quadrupla D B, quadrupla B N, & quadrupla K, ad D B, duplam B N, cum tripla K. Et sic in infinitum.

SCHOLIVM.

Ex dictis facile potest deduci in parabola quadratica, N E, esse ad O N D, vt D B, cum B N, ad dimidiam D B, cum dimidia B N, & cum sexta parte N D. Nam, cum in parabola quadratica, sit N E, ad O N D, vt tripla D B, cum tripla B N, ad duas D B, cum B N. Ergo & subtriplatis terminis, erit vt D B, B N, ad tertiam partem duarum D B, & vnius B N. At tertia pars duarum B D, facit duas

duas tertias partes B D; nempe duas tertias partes B N, & duas tertias partes N D. Ergo N E, erit ad O N D, vt D B, B N, ad tres tertias B N, nempe ad B N, cum

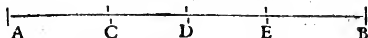


duabus tertijs partibus N D; nempe cum quatuor sextis partibus eiusdem. At B N, cum quatuor sextis partibus N D, facit dimidiam B N, dimidiam B D, & sextam partem N D. Quare patet propositum. Imo potest deduci per conuersionem rationis, esse N E, ad O E D, vt D B, B N, ad B N, cum tertia parte N D, vt consideranti patebit.

PROPOSITIO XVI.

Si quatuor magnitudines sint continuè proportionales. Erit vt excessus primæ maioris supra secundam, vna cum duplo excessu secundæ supra tertiam, & cum excessu tertiæ supra quartam, ad subsesquialteram primæ, & secundæ, cum tertia parte excessus secundæ supra quartam,

tam, sic excessus primæ supra secundam, ad sui subsesquialteram, cum tertia parte secundæ.



SInt quatuor magnitudines AB, BC, BD, BE, continuè proportionales. Dico vt AC, cum dupla CD, & cum DE, ad subsesquialteram AB, BC, cum tertia parte CE, sic AC, ad sui subsesquialteram, cum tertia parte CB. Quoniam enim ex proposit. 7. etiam tres AC, CD, DE, sunt continuè proportionales, & in eadem proportione cum AB, BC, &c. Ergo & vt AC, CD, DE, simul; nempe AE, ad mediam ipsarum CD, sic tres simul CB, DB, BE, ad DB; nempe sic tertia pars CB, DB, BE, ad tertiam partem DB. Sed & vt AE, ad CD, sic duæ tertiæ partes AE, ad duas tertias partes CD. Ergo vt AE, ad CD, sic sunt tam duæ tertiæ partes AE, ad duas tertias CD, quam tertia pars CB, BD, BE, ad tertiam partem DB. Quare cum magnitudines sint continuè proportionales, erit vt AE, ad CD, sic duo tertia AE, cum tertia parte CB, DB, BE, ad duo tertia CD, cum tertia parte DB. Et componendo, erit vt AE, cum CD, ad CD, sic duo tertia AE, CD, cum tertia parte CB, BE, & cum duobus tertijs DB, ad duo tertia CD, cum tertia parte DB. Et permutando, vt AE, cum CD,

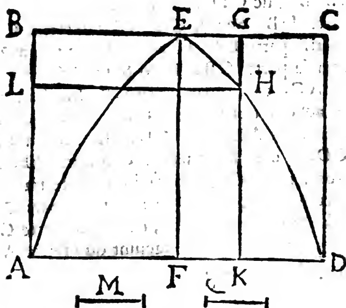
ad

ad duo tertia AE, cum duobus tertijs CD, DB; nempe cum duobus tertijs CB, & cum tertia parte CB, BE, sic CD, ad duo tertia CD, cum tertia parte DB. Sed vt CD, ad duo tertia CD, cum tertia parte DB, sic AC, ad duo tertia AC, cum tertia parte CB. Ergo & vt AC, ad duo tertia AC, cum tertia parte CB, sic AE, cum CD, ad duo tertia AE, CB, cum tertia parte CB, EB. At AE, cum CD, est AC, cum dupla CD, & cum DE: pariter duo tertia AE, CB, cum tertia parte CB, BE, faciunt duo tertia AB, BC, cum tertia parte CE; nam tertia pars CB, BE, faciunt duo tertia BE, cum tertia parte CE, & duo tertia AE, EB, faciunt duo tertia AB. Quare patet propositum.

PROPOSITIO XVII.

Si in quacumque parabola sit ducta parallela diametro. Erit parallelogrammum contentum sub ducta, & sub basi maioris portionis, ad ipsam maiorem portionem, vt excessus basis portionis supra duas vltimas minores proportionales, si proportio basis semiparabolæ, ad interceptam inter diametrum, & parallelam, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ binario, acceptus secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad tot bases prædictæ portionis, quotus est numerus parabolæ, vna cum excessu inter-

cepta inter diametrum, & parallelam, supra vltimam minorem proportionalem.



IN parabola AED, ducatur Hk, diametro EF, parallela; & compleatur parallelogrammum LK; ratioque AF, ad Fk, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ binario; sintque vltimi minimi termini M, Q. Dico LK, esse ad AEHk, vt excessus AF, supra M, & FK, supra Q, accepti secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad Ak, acceptam secundum numerum parabolæ, vna cum excessu Fk, supra Q.

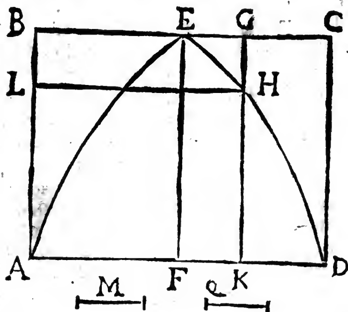
Quoniam enim, ex natura parabolæ, est vt kG, ad GH, sic potestas DF, congruens parabolæ, ad si-

ad similem potestatem Fk; nempe sic DF, seu AF, ad M. Ergo per conuersionem rationis, & conuertendo, erit kH, ad kG, vt excessus AF, supra M, ad AF. Cum autem sit vt excessus AF, supra M, ad AF, sic excessus Fk, supra Q, ad Fk. Ergo erit permutando, AF, ad Fk, vt excessus AF, supra M, ad excessum FK, supra Q. Et conuertendo, & componendo, vt kA, ad AF, sic excessus kA, supra Q, & M, ad excessum AF, supra M. Et rursum permutando, & conuertendo, vt excessus AF, supra M, ad AF, sic excessus Ak, supra M, Q, ad Ak. Sed vt excessus AF, supra M, ad AF, sic probatum est esse kH, ad kG; nempe parallelogrammum LK, ad Bk. Ergo vt LK, ad Bk, sic excessus Ak, supra M, Q, ad AK; nempe sic talis excessus acceptus secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad tot numero Ak. Verum ex propos. 13. BK, est ad portionem AEHk, vt Ak, accepta secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad eandem acceptam secundum numerum parabolæ, vna cum excessu Fk, supra Q. Ergo ex æquali, erit Lk, ad portionem AEHK, vt excessus Ak, supra M, & Q, acceptus secundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad AK, acceptam secundum numerum parabolæ, vna cum excessu Fk, supra Q. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

In parabola ergo quadratica, in qua proportionales AF, Fk, M, & Q, ſunt tantum quatuor, erit Lk, ad portionem, vt exceſſus triplus Ak, ſupra M, & Q, ad duplam Ak, cum exceſſu Fk,



ſupra Q; nempe ſubtriplando terminos, vt talis exceſſus vna vice ſumptus, ad ſubſeſquialteram AK, cum tertia parte exceſſus FK, ſupra Q. Verum exceſſus AK, ſupra M, & Q, eſt exceſſus AF, ſupra FK, duplus exceſſus FK, ſupra M, & exceſſus M, ſupra Q; quia AF, excedit M, exceſſu AF, ſupra FK, & FK, ſupra M; FK, vero excedit Q,

exceſſu

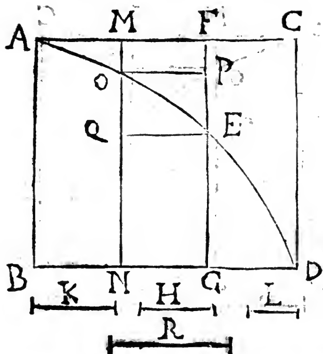
excessu ipsius supra M, & M, supra Q. Ergo erit L K, ad A E H K, vt excessus primæ A F, supra secundam F K, cum duplo excessu secundæ F K, supra tertiam M, vna cum excessu tertiæ M, supra quartam Q, ad subsesquialteram A K; nempe compositæ ex prima, & secunda, vna cum tertia parte excessu secundæ F K, supra quartam Q. Sed ex propositione antecedente, ostensum est esse in eadem ratione, excessum primæ A F, seù F D, supra F K, secundam, nempe K D, ad sui subsesquialteram, cum tertia parte F K, secundæ; nempe ad dimidiam D K, cum sexta parte A K: quia duæ tertiæ partes D K, nempe quatuor sextæ partes D K, faciunt dimidiam D K, cum sexta parte eiusdem; & tertia pars F K, est idem, ac sexta pars duplæ F K: sexta ergo pars duplæ K F, cum sexta parte K D, faciunt sextam partem A K. Ergo L K, erit ad A F H K, vt D K, ad sui dimidiam, cum sexta parte A K. Verum cum in scholio propos. 15. ostensum sit, quod si portioni H K D, circumscribatur parallelogrammum, hoc erit, ad portionem, vt A K, ad dimidiam A K, cum sexta parte K D. Ergo ex istis potest deduci hæc regula generalis. Nimirum; Quod si parabola quadratica secetur linea diametro parallela, secante ipsam in duas portiones: erit parallelogrammum sub parallela ducta, & sub basi vnius portionis, ad illam portionem, vt basis reliquæ portionis, ad sui dimidiam, vna cum sexta parte basis portionis.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

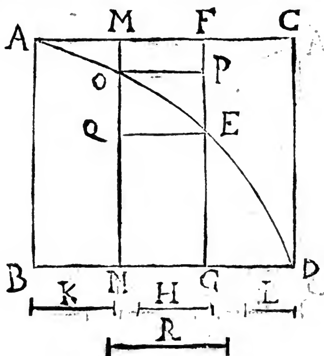
Si quælibet semiparabola secetur duabus lineis diametro parallelis; & segmento intermedio ab illis contento, circumscribatur parallelogrammum. Hoc erit ad dictum segmentum à sè inclusum, vt tot excessus basis semiparabolæ, quotus est numerus ipsius vnitate auctus, supra vltimam minimam proportionalem; quarum numerus excedat numerum parabolæ vnitate, & quarum maxima sit basis semiparabolæ; secunda intercepta inter diametrum, & parallelam proximiorem, ad consequens propos. 12; nempe ad excessum tot basium semiparabolæ, quotus est numerus ipsius vnitate auctus, supra tot numero continuè proportionalium, in ratione interceptæ inter diametrum, & parallelam remotiorem, ad interceptam inter diametrum, & parallelam proximiorem, quarum maxima sit vltima minor proportionalium, in ratione basis semiparabolæ, ad interceptam inter diametrum, & parallelam remotiorem; & quarum numerus excedat numerum parabolæ vnitate.

Semiparabola ABD, secetur duabus lineis ON, EG, AB, diametro parallelis; & segmento OEGN, circumscribatur parallelogrammum NP; ratio autem DB, ad BN, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat vnitate numerum parabolæ; sitque vltimus minimus terminus R. Eodem modo continuetur ratio DB, ad BG; sitque



ſitque vltimus terminus k; & fiat vt GB, ad BN, ſic k, ad H; quæ ratio continuetur in L, & cæteros tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate. Dico NP, eſſe ad OEGN, vt tot exceſſus DB, ſupra R, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad exceſſum tot DB, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ſupra k, H, & cæteras tot proportionales, quot ſunt ipſæ.

Producantur NO, GP, vſque ad M, & F. Quoniam enim, vt NM, ad MO, ſic poteſtas CA, ſeù DB, eiuſdem gradus cum parabola,



ad ſimilem poteſtatem MA, ſeù BN; nempe vt DB, ad R. Ergo per conuerſionem rationis, & conuertendo, erit ON, ad NM; nempe parallelogrammum NP, ad NF, vt exceſſus BD, ſupra R, ad BD; nempe vt tot tales exceſſus, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot numero DB. At ex propoſ. 12. eſt NF, ad ſegmentum OEGN, vt tot DB, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad exceſſum ipſarum ſupra K, H, & cæteras tot porportionales, quot ſunt ipſæ. Ergo ex æquali, erit OG, ad OEGN, vt tot exceſſus BD, ſupra R, quotus eſt numerus

para-

parabolæ vnitate auctus, ad excessum tot DB, quot sunt ipsi, supra K, H, & cæteras tot numero proportionales. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

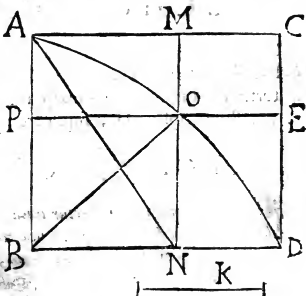
In parabola ergo quadratica, erit NP, ad OEGN, vt triplus excessus DB, supra R, quæ sit tertia minor proportionalis ipsarum DB, BN, ad excessum triplæ DB, supra tres k, H, L.

PROPOSITIO XIX.

Si quæcumque semiparabola secetur linea diametro parallela, & per punctum lineæ parabolicæ vbi secatur, ordinatim applicetur linea ad diametrum, adeo vt segmentum ad diametrum, secetur in parallelogrammum, & semiparabolam ad verticem. Erit parallelogrammum ad semiparabolam ad verticem, vt tot differentiæ inter diametros semiparabolarum, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot diametros semiparabolæ ad verticem, quotus est numerus parabolæ.

SEmiparabola ABD, secetur ON, diametro AB, parallela; & ordinatim applicetur OP. Erit parallelogrammum PN, ad semiparabolam PAO, vt tot BP, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot AP, quotus est numerus

parabolæ. Quoniam enim parallelogrammum PN, eſt ad parallelogrammum PM, vt BP, ad PA; nempe vt tot BP, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot numero AP. PM, autem, ex propoſit. 1. eſt ad PAO, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolę; nempe vt tot PA, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad AP, acceptam ſecundum numerum parabolæ. Ergo ex æquali, erit PN, ad APO, vt tot BP, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot AP, quotus eſt numerus parabolæ. Quod &c.



SCHOLIVM.

Sed & aliam rationem PN, ad APO, licet facile colligere; nempe quod ſit, vt tot differentiæ, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, inter

ter DB, & vltimam minorem proportionalem continuè, quarum prima sit DB, secunda BN, & quarum numerus excedat numerum parabolæ vnitate, ad tot tales vltimas proportionales, acceptas secundum numerum parabolæ. V. g. in parabola quadratica, erit PN, ad PAO, vel vt tres BP, ad duas PA. Vel vt tres excessus DB, supra K, tertiam minorem proportionalem ipsarum DB, BN, ad duas K.

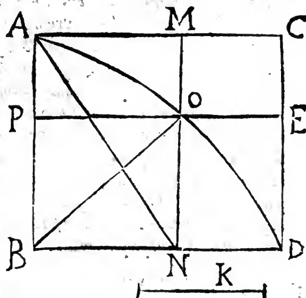
PROPOSITIO XX.

Si quæcumque semiparabola, secetur linea diametro parallela. Erit segmentum ad diametrum, ad reliquam portionem, vt rectangulum sub tot basibus semiparabolæ, quotus est numerus ipsius, & sub intercepta inter diametrum, & parallelam, vna cum rectangulo sub hac intercepta, & sub excessu basis semiparabolæ supra vltimam minorem proportionalem in ratione basis semiparabolæ, ad hanc interceptam, quarum numerus excedat numerum parabolæ vnitate, ad rectangulum sub reliqua parte basis semiparabolæ, & sub excessu, tot basium semiparabolæ, quotus est numerus ipsius vnitate auctus, supra tot illas continuè proportionales.

SEmiparabola BAD, cum sibi circumscripto parallelogrammo, secetur MON, diametro AB, parallela; ratioque BD, ad BN, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat nume-

rum

rum parabolæ vnitate; sitque vltimus terminus k. Dico segmentum AONB, esse ad portionem ODN, vt rectangulum contentum sub BN, & sub BD, accepta secundum numerum parabolæ, vna cum rectangulo sub eadem BN, & sub excessu DB, supra k, ad rectangulum contentum sub ND, & sub excessu tot DB, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, supra tot DB, BN, & alias proportionales prædictas. Nam ratio segmenti AONB, ad portionem ODN, componitur ex ratione segmenti, ad BM; huius ad MD; & huius, ad portionem ODN. Ratio AONB, ad BM, est, ex proposit. 10. conuertendo, eadem cum ratione excessus tot DB, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, supra k, ad tot BD, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus; nempe vt tot BD, quotus est numerus parabolæ, cum vnico excessu DB, supra k, ad idem consequens. Ratio BM, ad MD,



est

ẽst eadem cum ratione BN, ad ND. Et ratio NC, ad portionem, est eadem cum ratione tot BD, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad excessum ipsarum, supra DB, BN, & alias proportionales, quot sunt ipsæ, ex secunda parte proposit. 9. per conuersionem rationis. Ergo ratio AONB, ad ODN, componetur ex ijsdem rationibus: nempe ex ratione tot DB, quotus est numerus parabolæ, vna cum excessu DB, supra k, ad tot DB, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus; harum, ad excessum ipsarum, supra DB, BN, & cæteras tot proportionales, quot sunt ipsæ; & BN, ad ND. Sed rationes tot DB, quotus est numerus parabolæ, cum excessu DB, supra k, ad tot DB, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus; & harum ad excessum ipsarum supra DB, BN, & cæteras tot proportionales, quot sunt ipsæ, componunt rationem tot DB, quotus est numerus parabolæ, vna cum excessu DB, supra k, ad excessum tot DB, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, supra DB, BN, & cæteras tot proportionales, quot sunt ipsæ. Ergo ratio AONB, ad ODN, componetur ex antedicta ratione, & ex ratione BN, ad ND. Sed ex istis rationibus, componitur quoque ratio rectanguli sub BN, in DB, acceptam secundum numerum parabolæ, & rectanguli sub eadem BN, in excessum DB, supra k, ad rectangulum sub DN, in excessum tot DB, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, supra DB, BN, &
cæteras

cæteras prædictas proportionales. Quare patet propositum.

SCHOLIVM.

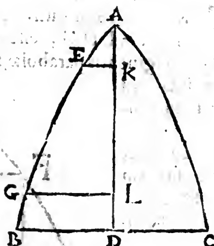
Ex quibus licet inferre; quod in parabola quadratica, erit segmentum AONB, ad portionem ODN, vt duplum rectangulum DBN, cum rectangulo sub BN, in excessum DB, supra k, quæ sit tertia proportionalis ipsarum DB, BN, ad quadratum ND, vna cum rectangulo sub ND, & sub excessu DB, supra k; nimirum, ad duplum quadratum ND, cum rectangulo sub ND, in excessum BN, supra k.

PROPOSITIO XXI.

Si in qualibet parabola, applicentur ordinatim ad diametrum duæ lineæ æque remotæ, vna à vertice, alia à basi. Harum potestates erunt æquales potestati basis.

Esto quælibet parabola BAC, in qua ordinatim applicentur duæ EK, GL, adeo vt Ak, DL, sint æquales. Dico potestates EK, GL, eiusdem gradus cum parabola, æquari simili potestati BD. Quoniam enim, vt DA, ad Ak, sic potestas DB, eiusdem gradus cum parabola, ad similem potestatem Ek: & pariter, vt eadem DA, ad AL, sic eadem

eadem poteſtas DB, ad ſimilem poteſtatem GL. Ergo vt DA, ad AK, AL, ſimul, ſic poteſtas DB, ad poteſtates EK, GL, ſimul. At Ak, AL, ſunt æquales ipſi DA. Ergo & poteſtates Ek, GL, ſimul, erunt æquales poteſtati DB.



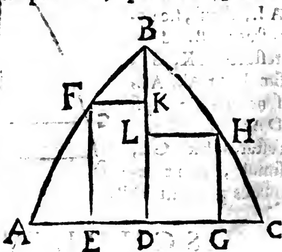
SCHOLIVM.

Ex hac propoſitione elicitur illud, quod particulariter probauimus in noſtro libello, cuius titulus. Sexaginta Problemata Geometrica, propoſitione poſita pagina 114. nimirum in parabola quadratica, quadrata Ek, GL, æquari quadrato BD.

PROPOSITIO XXII.

Lineæ ductæ in qualibet parabola diametro parallelæ, ſunt inter ſè, vt exceſſus poteſtatis baſis ſemiparabolæ eiuſdem gradus cum parabola, ſupra poteſtates eiuſdem gradus interceptarum inter ipſas, & diametrum.

ESto quælibet parabola ABC, cuius diameter BD, cui sint ductæ parallelæ FE, HG. Dico FE, ad HG, esse vt excessus potestatis AD, congruentis parabolæ, supra similem potestatem ED, ad excessum eiusdem potestatis AD, seù DC, supra similem potestatem DG. Ducantur Fk, LH, AC, parallelæ. Quoniam vt DB, ad Bk, sic potestas



AD, eiusdem gradus cum parabola, ad similem potestatem FK, seù ED. Ergo per conuersionem rationis, & conuertendo, erit vt Dk, seù EF, ad DB, sic excessus potestatis AD, supra similem potestatem ED, ad similem potestatem AD. Pariter per conuersionem rationis, DB, est ad DL, seù ad GH, vt potestas AD, seù DC, ad excessum illius, supra potestatem similem DG. Ergo ex æquali, erit FE, ad HG, vt primus excessus, ad secundum excessum. Quod &c.

SCHO-

SCHOLIVM.

In parabola ergo quadratica erit FE, ad HG, vt rectangulum AEC, ad rectangulum AGC.

PROPOSITIO XXIII.

Si à vertice cuiuscumque trilinei à primo, ducatur linea in basim, secans curuam parabolicam: & per punctum vbi secat curuam, ducatur vsque ad diametrum parallela basi. Erit basis trilinei ad sui partem interceptam inter ductam, & diametrum, vt potestas diametri trilinei vno gradu inferior potestate trilinei, ad similem potestatem diametri trilinei ad verticem.

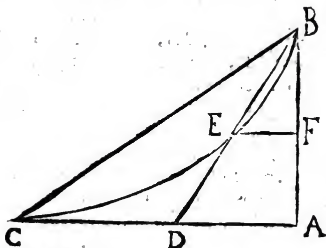
SIt quodlibet trilineum à primo, CBA, cuius vertex B, diameter BA, & à vertice B, ducatur BD, in basim, secans curuam in E; & per E, ducatur EF, parallela CA. Dico CA, esse ad AD, vt potestas AB, vno gradu inferior potestate trilinei, ad similem potestatem BF. V. g. in trilineo quadratico, erit CA, ad AD, vt AB, ad BE. In cubico, vt quadratum AB, ad quadratum BF. In quadratoquadratico, vt cubus AB, ad cubum BF; & sic in infinitum. Quoniam enim proportio CA, ad AD, componitur ex proportione CA, ad EF, & huius ad DA;

ex genesi autem parabolarum, est vt CA, ad EF, sic potestas AB, eiusdem gradus cum trilineo, ad similem potestatem BF: & vt EF, ad DA, sic BF, ad BA. Ergo ratio CA, ad AD, componetur ex rationibus potestatis AB, eiusdem gradus cum trilineo, ad similem potestatem BF, & ex ratione BF, ad BA. Sed ex istis duabus rationibus componitur ratio potestatis AB, vno gradu inferioris potestate trilinei, ad similem potestatem BF. Ergo patet propositum.

PROPOSITIO XXIV.

Si cuilibet trilineo à primo, secto vt in propositione antecedenti, sit circumscriptum triangulum. Erit triangulum pars totius, cuius latus non est diameter trilinei, ad portionem excessus ipsius supra portionem trilinei à se comprehensam, vt factum sub excessu potestatis diametri trilinei vno gradu inferioris potestate trilinei, supra similem potestatem diametri trilinei ad verticem, in quadratum diametri trilinei, ad tales partes excessus potestatis diametri trilinei vno gradu altioris potestate trilinei supra similem potestatem trilinei ad verticem, quæ ad talem excessum sè habeant, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum.

DVcatur in schemate proposit. ant. CB. Dico triangulum CBD, esse ad spatium CBEC, compre-



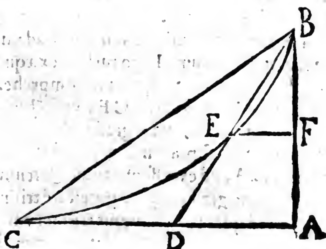
comprehenſum à rectis AB, BE, & à curua CE, vt factum ſub exceſſu poteſtatis AB, vno gradu inferioris poteſtate trilinei ſupra ſimilem poteſtatem BF, in quadratum BA, ad tales partes exceſſus poteſtatis AB, vno gradu ſuperioris poteſtate trilinei, ſupra ſimilem poteſtatem BF, quæ ſe habeant ad talem exceſſum, vt numerus trilinei vnitate minutus ad numerum trilinei vnitate auctum. V. g. in trilineo quadratico, erit vt factum ſub FA, in quadratum BA, ad tertiam partem exceſſus cubi BA, ſupra cubum BF. In cubico, vt factum ſub exceſſu quadrati BA, ſupra quadratum BF, in quadratum BA, ad duas quartas partes exceſſus quadratoquadrati AB, ſupra quadratoquadratum BF. In quadratoquadratico, vt factum ſub exceſſu cubi AB, ſupra cubum BF, in quadratum BA, ad tresquintas partes exceſſus quadratocubi AB, ſupra quadrato-

drato-

dratocubum BF. Et ſic in infinitum.

Quoniam enim ex propoſit. ant. eſt CA, ad AD; nempe triangulum CBA, ad triangulum DBA, vt poteſtas AB, vno gradu inferior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem BF. Ergo per conuerſionem rationis, & conuertendo, erit triangulum CBD, ad triangulum CBA, vt exceſſus poteſtatis AB, vno gradu inferioris poteſtate trilinei, ſupra ſimilem poteſtatem BF, ad poteſtatem BA. Et ducendo hos terminos in quadratum BA, erit CBD, ad CBA, vt factum ſub exceſſu poteſtatis AB, vno gradu inferioris poteſtate trilinei, ſupra ſimilem poteſtatem BF, in quadratum BA, ad factum, ſub poteſtate BA, vno gradu inferiore poteſtate trilinei in quadratum BA; nempe ad poteſtatem BA, vno gradu ſuperiorem poteſtate trilinei. At triangulum CBA, eſt ad exceſſum ipſius ſupra trilineum, nempe ad ſpatium contentum à recta, & curua CB, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad numerum trilinei vnitate minutum, ex ſcholio primo, propoſit. prima; nempe vt poteſtas AB, vno gradu ſuperior poteſtate trilinei, ad tales ſui partes, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Ergo ex æquali, erit triangulum CBD, ad ſpatium contentum à recta, & curua CB, vt factum ſub exceſſu poteſtatis AB, vno gradu inferioris poteſtate trilinei ſupra ſimilem poteſtatem BF, in quadratum BA, ad tales partes poteſtatis AB, vno gradu ſuperioris

pote-



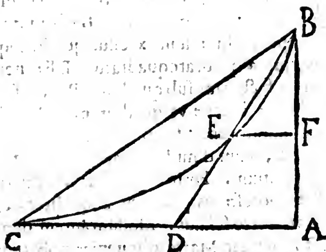
poteſtate trilinei, quæ ſe habeant ad ipſam vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Rurſum ſpatium comprehenſum à recta, & curua CB, eſt ad ſpatium comprehenſum à recta, & curua BE, vt poteſtas AB, vno gradu ſuperior poteſtate trilinei, ad ſimilem poteſtatem BF, ex ſcholio primo, propoſit. 35 nempe vt tales partes prædictæ poteſtatis AB, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus ad numerum trilinei vnitate auctum, ad ſimiles partes poteſtatis BF. Ergo per conuerſionem rationis, erit ſpatium comprehenſum à recta, & curua CB, ad exceſſum ipſius ſupra ſpatium comprehenſum à recta, & curua EB, vt tales partes poteſtatis AB, vno gradu altioris poteſtate trilinei, quæ ſe habeant ad ipſam poteſtatem AB, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum, ad exceſſum ipſarum

rum ſupra tales partes poteſtatis BF, vno gradu altioris poteſtate trilinei, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Ergo rurſum ex æquali, erit triangulum CBD, ad ſpatium comprehenſum à rectis CB, BE, & à curua CE, vt factum ſub exceſſu poteſtatis AB, vno gradu depreſſioris poteſtate trilinei, ſupra ſimilem poteſtatem BF, in quadratum BA, ad exceſſum talium partium poteſtatis AB, vno gradu altioris poteſtate trilinei, quæ ſe habeant ad ipſam, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum, ſupra ſimiles partes poteſtatis ſimilis BF; nempe ad talem partem exceſſus poteſtatis prædictæ AB, ſupra ſimilem poteſtatem BF, quæ ſe habeant ad ipſum exceſſum, vt numerus trilinei vnitate minutus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Quod oſtendere oportebat.

SCHOLIVM I.

Sed in trilineis quadratico, & cubico, licet compendioſiorem rationem, ex dictis, deducere. In trilineo enim quadratico, poſſumus deducere, triangulum CBD, eſſe ad prædictum ſpatium, vt quadratum AB, ad rectangulum ABF, cum tertia parte quadrati FA. Nam cum ſit, vt factum ſub AF, in quadratum BA, ad tertiam partem exceſſus cubi AB, ſupra cubum BF; nempe ad ter-

tiam



tiam partem cubi A F, vna cum facto sub A F, in quadratum BF, cum facto sub A F, in rectangulum A F B. (cubus enim A B, vt ostenditur à multis, sed præcipuè à Caualerio 2. Gem. Ind. prop. 38. æquatur cubis partium A F, F B, tribus factis sub A F, in quadratum B F, & tribus factis sub B F, in quadratum A F, nempe tribus factis sub A F, in rectangulum A F B,) & cum in omnibus talibus solidis, sit commune latus A F. Erit triangulum CBD, ad prædictum spatium, vt quadratum A B, ad rectangulum A F B, cum quadrato B F (nempe ad rectangulum A B F) cum tertia parte quadrati F A.

Pariter in trilineo cubico, erit C B D, ad prædictum spatium, vt quadratum A B, ad rectangulum A B F, cum dimidio quadrati A F. Nam cum sit, vt factum sub quadrato A B, in quadratum A F,

& in duo rectangula BFA (talibus enim planis, quadratum AB, excedit quadratum BF,) ad duo quarta, nempe ad dimidium excessus quadratoquadrati AB, supra quadratoquadratum BF; nempe ad dimidium factorum sub quadratis BA, BF, in eadem plana; nempe vt quadratum BA, ad dimidium quadratorum AB, BF; nempe ad rectangulum ABF, cum dimidio quadrati AF. Ergo patet propositum. Forsitam etiam in alijs trilineis prædictæ potestates poterunt aliqualiter deprimi, & hoc pro certo scimus. Modum autem depræssionis lector proprio Marte adinueniat; nobis enim sufficit superiora indicasse.

SCHOLIVM II.

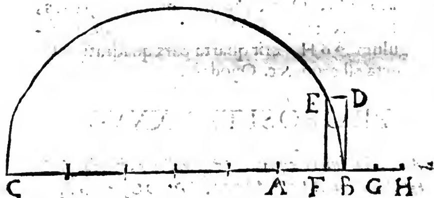
Paucis ab hinc diebus, cum Illustrissimus, ac Reuerendissimus Dominus Gregorius Barbadicus Patritius Venetus, Bergomique Antistes, Venetias petijsset; accidit, vt benignitate huius præstantissimi præsulis, in quo propemodum impossibile videtur statui posse quid magis emicet, Sanguinis claritas, Eruditio, Pietasue actionum, fuerit permissum, frui suaui consuetudine, doctrinaque Perillustris Cosmæ Galilei, celeberrimi Galilei nepotis. Ab hoc, inter familiares discursus, excitati fuimus, incumbere solutioni cuiusdam problematis, cuius constructio, quamuis imposterum dicendis, videatur parum, aut nihil inseruire; attamen non videtur

aliena

aliena infinitarum parabolarum à materia, quam præ manibus habemus. Problema suo loco proponetur, interea conscribemus propositiones, quas ad illius solutionem conducere arbitramur.

PROPOSITIO XXV.

Datam rectam lineam taliter producere, vt rectangulum sub data, & sub producta, sit æquale quartæ parti quadrati lineæ datæ, assumentis dimidiam productæ.



ESto data recta linea AB. Oportet ipsam taliter producere in H, vt rectangulum ABH, sit æquale quartæ parti quadrati AG (diuisa BH, bifariam in G.) Fiat CB, sextupla AB; & super ea fiat semicirculus; ac à puncto B, erigatur normalis BD, æqualis BA; & per D, ducatur DE, parallela CB, occurrens periphæriæ in E;

dimissaque perpendiculari EF, fiat BG, æqualis BF; cuius fiat dupla BH. Dico BH, esse quæsitam. Nam rectangulum CFB, est æquale quadrato EF; nempe quadrato DB; nempe quadrato AB. Quare addito communi quadrato FB; rectangulum CFB, cum quadrato FB; nempe rectangulum CBF; nempe rectangulum CBG; nempe sextuplum rectangulum ABG, erit æquale quadratis AB, BG. Rursumque additis communibus duobus rectangulis ABG. Ergo octuplum rectangulum ABG, erit æquale quadratis AB, BG, & duobus rectangulis ABG; nempe quadrato AG. Quare, & illorum quartæ partes, nempe duo rectangula ABG; hoc est vnicum rectangulum ABH, erit quarta pars quadrati AG. Producta est ergo, &c. Quod, &c.

PROPOSITIO XXVI.

In AB, CD, lineas æquales, & parallelas, incidat CB; & ducantur AED, AFG. Erit DG, ad GC, vt dupla EF, ad FC.

QVoniam enim triangula AFB, CFG, sunt similia. Ergo vt BF, ad FC, sic AB, seu DC, ad CG. Quare & diuidendo, vt excessus BF, supra FC, nempe vt dupla FE, ad FC, sic DG, ad GC, Quod &c.

CO-

COROLLARIVM.

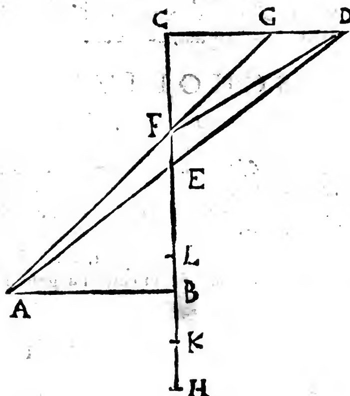
Ergo rectangulum ſub extremis, nempe ſub dupla EF, & ſub GC, erit æquale rectangulo ſub medijs; nempe ſub DG, & ſub CF. Ergo & triangula horum dimidia, erunt æqualia; nempe triangulum, cuius baſis CG, altitudo dupla FE, erit æquale triangulo, cuius baſis DG, altitudo CF.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

In eodem ſchemate, producta EB, in H, ſic, vt diuiſa BH, bifariam in K, rectangulum EBH, ſit quarta pars quadrati EK. Impoſſibile eſt inter C, D, reperire punctum G, vt actis GFA, FD, triangulum GFD, maius ſit triangulo, cuius baſis CD, altitudo BH.

Fiat ergo ſi eſt poſſibile; & ſit hoc triangulum GFD; & ipſi CF, fiat æqualis EL. Ergo reliqua LB, erit æqualis reliquæ FE. Quoniam, ex hypotheſi, triangulum GFD, cuius baſis GD, altitudo CF, maius eſt triangulo, cuius baſis CD, altitudo BH; & ex propoſit. ant. triangulo, cuius baſis DG, altitudo CF, eſt æquale triangulum, cuius baſis CG, altitudo dupla FE. Ergo triangulum, cuius baſis CG, altitudo dupla FE, erit maius triangulo, cuius baſis CD, altitudo BH. Ergo maior erit proportio duplæ FE, ad BH, proportione DC, ad CG; nempe proportione AB, ad CG; nempe proportione BF, ad FC. Quare & componendo, maior erit proportio duplæ FE, ſeù duplæ (LB) cum BH, ad BH, proportione BC, ad CF. Quare rectangulum ſub extremis, maius erit rectangulo ſub medijs. Rectangulum ergo ſub CF, ſeù ſub ei æquali, EL, & ſub compoſita ex dupla LB, cum BH, maius erit rectangulo



gulo CBH. Quare & dimidium, maius erit dimidio. Ergo rectangulum ELK, maius erit rectangulo EBH. Quod est contra hypothesim. Quia supponitur, rectangulum EBH, æquale esse quartæ parti quadrati Ek; hoc est maximo rectangulorum ex partibus Ek. Quare patet propositum.

COROLLARIVM.

Ex dictis ergo facile patebit, quod si rectangulum

lum EBH, maius sit quarta parte quadrati E k, non solum multo minus reperibile esse triangulum, triangulo prædicto maius, sed nec etiam æquale.

SCHOLIVM.

Notetur tamen, quod quamuis in supra dictis, & in infra dicendis, suppositum videatur, angulos B, & C, rectos esse, nihilominus hoc haud est necesse. Nam possunt etiam esse quomodocumque obliqui. At quando non sunt recti, nequaquam debemus considerare CF; duplam FE, & BH, tamquam altitudines talium trium triangulorum: sed tamquam latera super basibus in eodem angulo inclinata.

PROPOSITIO XXVIII.

In eodem schemate, si CF, supponatur æqualis dimidiæ EK. Triangulum GFD, æquabitur triangulo, cuius basis CD, altitudo BH.

ETenim quoniam rectangulum EBH, est æquale rectangulo ELk (quia tunc EL, Lk, essent æquales). Ergo & duplum rectangulum EBH; nempe rectangulum CBH, erit æquale duplo rectangulo ELK; nempe rectangulo sub EL, in duplam LB, & rectangulo sub eadem EL, in BH; nempe rectangulo sub CF, in compositam ex du-

pla

pla FE, & ex BH. Ergo vt BC, ad CF, sic dupla FE, cum BH, ad BH. Et diuidendo, vt BF, ad FC; nempe AB, seù DC, ad CG, sic dupla FE, ad BH. Ergo triangulum, cuius basis CD, altitudo BH, erit æquale triangulo, cuius basis CG, altitudo dupla FE; nempe, ex propos. 26. triangulo, cuius basis DG, altitudo CF; nempe triangulo GFD. Quod &c.

ctum præſcripta lege in CED, æquale. Si ergo dato triangulo GFD, non maximo, quis iubeat conſtruere aliud ęquale; ei ſatisfiet, faciendo vt DC, ad CG, ſic duplam FE, ad BH, ponendam in directũ ipſi EB; deinde diuidendo BH, bifariam in K, & faciendo EL, æqualem CF. Nam patet in primis, triangulum GFD, æquari triangulo, cuius baſis CD, altitudo BH. Cum enim factum ſit vt DC, ad CG, ſic dupla FE, ad BH. Ergo triangulum, cuius baſis CD, altitudo BH, erit æquale trian-

gulo cuius basis C G, altitudo dupla F E; nempe, ex dictis, triangulo G F D. Patet deinde rectangulum E L k, æquari rectangulo E B H. Etenim rursum, cum factum sit vt D C, ad C G; seù vt A B, ad C G; seù vt B F, ad F C, sic dupla F E, seù L B, ad B H. Ergo componendo, vt B C, ad C F, seù ad E L, sic dupla L B, cum B H, ad B H. Ergo rectangulum C B H, erit æquale rectangulo sub E L, in duplam L B, cum B H. Ergo & dimidium, æquale dimidio; nempe rectangulum E B H, erit æquale rectangulo E L k. Vel ergo E L, est maior L k, vel minor; & secundum, quod est maior, vel minor, diuidatur etiam in alio puncto L, vt rectangula E L K, sint æqualia, & E L, fiat æqualis C F, adeo vt habeamus duo puncta F, vnum magis, aliud minus distans à C, & fiat prior constructio, & habebimus triangulum æquale dato triangulo.

PROPOSITIO XXIX.

In eodem schemate. Triangula C F G, A F B, minora erunt triangulis C E D, A E B.

Quoniam enim A E, E D, sunt æquales. Ergo triangula A F E, F E D, erunt æqualia. Quare trapezium F D, maius erit triangulo F A E. Additisque communibus triangulis A E B, C F G. Ergo duo triangula C F G, A E B, cum trapezio

F D;

F D; nempe duo triangula C E D, A E B, maiora erunt tribus triangulis C F G, F A E, E A B; nempe triangulis C F G, A F B. Quod &c.

PROPOSITIO XXX.

In eodem schemate, supposito C F, aequalem esse F B, & C G, ipsi A B, & ducta A E D, vt libet sub A F G. Triangula C E D, A E B, semper erunt maiora triangulis C F G, A F B.

QVoniam enim E D, maior est E A. Ergo, acta F D, triangulum F E D, maius erit triangulo A F E. Ergo trapezium F D, erit multo maius triangulo F A E. Additis ergo vt prius, triangulis C F G, A E B. Triangula C E D, A E B, erunt maiora triangulis C F G, A F B. Quod &c.

SCHOLIVM.

Patet ergo ex dictis, quod si data A B, cui C D, sit parallela, & quibus occurrat C B, aliquis iubeat ducere A F G., vt duo triangula C F G, A F B, sint omnium minima, hoc haud praestari à linea cadente sub A E D, secante C B, bifariam; quia haec constituit semper triangula maiora triangulis C E D, A E B. Hoc ergo non adimplebitur nisi à linea cadente supra A E D. Haec autem nequit esse nisi A F G, ducta tali lege, vt triangulum G F D, sit omnium

omnium maximum ducibilium intra triangulum CED, ſic, vt latus GF, pertingat ad A. Ratio autem huius aſſerti eſt, quia cum duo triangula CED, AEB, excedant duo triangula CFG, AFB, triangulo FGD; quando exceſſus erit maximus, nempe triangulum GFD, relinquentur triangula CFG, AFB, minima. Sit ergo.

PROPOSITIO XXXI.

Data AB, magnitudine, & CD, ei parallela, quibus occurrat CB. Ducere AFG, vt duo triangula CFG, AFB, ſint omnium minima.

Diuidatur CB, bifariam in E, & EB, producatur in H, vt diuiſa BH, bifariam in k, rectangulum EBH, ſit æquale quartæ parti quadrati EK; ſecetur Ek, bifariam in L, & ipſi EL, fiat æqualis CF; & ducatur AFG. Dico triangula CFG, AFB, eſſe quæſita. Demonſtratio patet ex dictis.

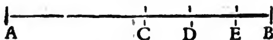
SCHOLIVM.

Vt ſupra innuimus, conſtructio huius problematis, non eſt totaliter aliena à materia infinitarum parabolarum. Nam cum triangulis CFG, AFB, poſſimus intelligere circumſcribi ſemiparabolas cuiuſcumque gradus, quarum diametri ſint CF, FB, ſemi-

ſemibaſes vero C G, AB, quæ vtique relatæ ad alias parabolas eiuſdem gradus, erunt vt triangula, ad alia triangula; patet quod ſemiparabolæ circumſcriptæ minimis triangulis, erunt etiam ipſæ minimæ. Vnde ex dictis patet ſolui poſſe hoc Problema, nempe. Datis, quæ ſupra, ducere A F G, vt ſemiparabolæ cuiuſcumque gradus, quarum diametri CF, FB, ſemibaſes vero CG, AB, ſint omnium minimæ. Sed Problema de inueniendis duobus minimis triangulis libet vniuerſaliter proponere, nimirum. Inuenire duo triangula ſpatio dato æqualia, ſeù, quod idem eſt, ad ſpatium datum, proportionem datam habentia. Ex cuius reſolutionis progreſſu, patebunt etiam minima triangula. Pro ſolutione ergo problematis, procedatur per ſequentes propoſitiones.

PROPOSITIO XXXII.

Datam rectam lineam ſectam biſariam, rurſum ſecare non biſariam, vt rectangulum ſub tota, & ſub intercepta inter ſectiones, ſit æquale quartæ parti quadrati maioris ſegmenti totius lineæ.

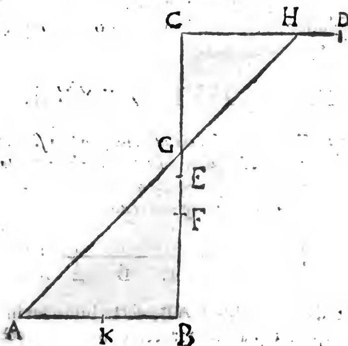


SIt data recta linea A B, ſecta bifariam in C. Oportet ipſam taliter ſecare in D, vt rectangulum

gulum A B, C D, sit æquale quartæ parti quadrati A D. Hæc propositio est ferè eadem cum proposit. 25. Nam si A C, producatur in E, vt diuisa C E, bifariam in D, rectangulum A C E, sit æquale quartæ parti quadrati A D. Patet etiam rectangulum A B, C D, æquale rectangulo A C E, esse quartam partem eiusdem quadrati A D.

PROPOSITIO XXXIII.

Si A G B, C G H, sint duo triangula rectangula ad verticem. Erit vt G B, ad B K, dimidiam B A, sic duo quadrata C G, G B, ad ipsa triangula.



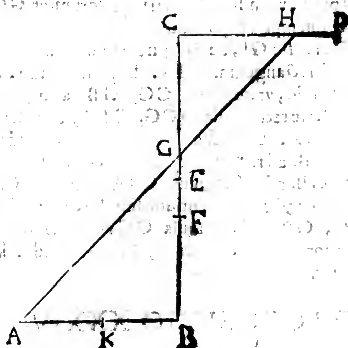
Nam

Nam propter similitudinem triangulorum, vt GC, ad CH, nempe vt quadratum GC, ad rectangulum GCH, sic GB, ad BA; nempe sic quadratum GB, ad rectangulum GBA. Et permutando, & componendo, vt quadrata CG, GB, ad quadratum GB, sic rectangula HCG, GBA, ad rectangulum GBA. Et rursum permutando, vt quadrata CG, GB, ad rectangula HCG, GBA, sic quadratum GB, ad rectangulum GBA; nempe sic GB, ad BA. Et ad consequentium dimidia, vt quadrata CG, GB, ad triangula CGH, AGB, dimidia illorum rectangulorum, sic GB, ad Bk. Quod &c.

PROPOSITIO XXXIV.

Si AB, sit data, & CD, sit ei parallela, quibus occurrat normaliter CB, quæ sit secta bifariam in E, & non bifariam in F, sic vt rectangulum CB, EF, maius sit quarta parte quadrati CF. Si in CF, sumatur arbitrariè punctum G, per quod ducatur AGH, semper duo triangula ad verticem, erunt maiora rectangulo ABF.

QVoniam enim, per hypothesim, rectangulum CB, EF, maius est quarta parte quadrati CF; Ergo maius erit rectangulo CGF. Ergo & duplum, erit maius duplo; nempe duplum rectangulum sub CB, in EF, erit maius duplo rectangu-

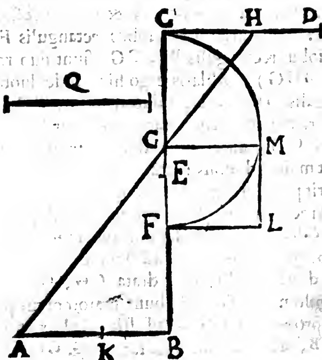


lo CGF. Addito ergo communi duplo rectangulo CBF: duo rectangula CBE, erunt maiora duobus rectangulis CGF, & duobus rectangulis CBF. Et denuo additis communibus duobus quadratis CG; ergo duo rectangula CBE; nempe quadratum CB, cum duobus quadratis CG, erunt maiora duobus rectangulis CGF, duobus rectangulis CBF, & duobus quadratis CG; nempe erunt maiora duobus rectangulis BCG, & duobus rectangulis GBF (nam duo rectangula CGF, cum duobus quadratis CG, faciunt duo rectangula FCG: duo vero rectangula CBF, diuiduntur in duo

duo rectangula CG, FB, & in duo rectangula GBF: & simul additis duobus rectangulis FCG, & duobus rectangulis BF, CG, fiunt duo rectangula BCG). Ablatis ergo hinc inde duobus rectangulis BCG, ergo duo quadrata BG, GC, (quæ remanent si à quadrato CB, cum duobus quadratis CG, auferantur duo rectangula BCG) erunt maiora duobus rectangulis GBF. Ergo maior erit proportio quadratorum CG, GB, ad duplum rectangulum ABF, proportione dupli rectanguli GBF, ad idem duplum rectangulum ABF; nempe proportione GB, ad BA. Et ad consequentium dimidia: Ergo quadrata CG, GB, ad rectangulum ABF, habebunt maiorem proportionem proportione GB, ad BK. Sed ex prop. ant. vt GB, ad BK, sic quadrata CG, GB, ad triangula CGH, AGB Ergo proportio quadratorum CG, GB, ad rectangulum ABF, maior erit proportione eorundem quadratorum, ad triangula. Quare triangula maiora erunt rectangulo ABF. Quod &c.

SCHOLIVM.

Ex quibus elicitur, quod aliquo iubente ducere AGH, vt duo triangula ad verticem, sint æqualia rectangulo ABF; oportebit BF, ablatam à CB, taliter relinquere CF, vt rectangulum CB, EF, non sit maius quarta parte quadrati CF. Imo, ex



progreſſu demonſtrationis patet, quod ſi rectangulum CB, EF, ſit æquale quartæ parti quadrati CF, & attamen punctum G, non ſit biſecans CF, nihilominus duo triangula erunt maiora rectangulo ABF. Nam etiam in hoc caſu, rectangulum CGF, minus erit rectangulo CB, EF. Vnde ſequendo veſtigia antecedentis demonſtrationis, idem probabitur.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

Si datis iisdem, quæ in ant. propos. rectangulum CB, EF, æquale sit quartæ parti quadrati CF, & CF, sit secta bifariam in G, & agatur AGH. Triangula ad verticem, erunt æqualia rectangulo ABF.

NAm, cum rectangulum CGF, æquetur rectangulo CB, EF; sequendo vestigia ant. propos. concludemus tandem, quadrata CG, GB, æquari duplo rectangulo GBF. Ergo hæc ad duplum rectangulum ABF, erunt in eadem proportione. At duo rectangula GBF, sunt ad duo rectangula ABF, vt GB, ad BA. Ergo quadrata CG, GB, erunt ad duo rectangula ABF, vt GB, ad BA. Et ad consequentium dimidia, quadrata erunt ad rectangulum ABF, vt GB, ad Bk; nempe ex proposit. 33. vt eadem quadrata, ad triangula. Ergo triangula erunt æqualia rectangulo. Quod &c.

PROPOSITIO XXXVI.

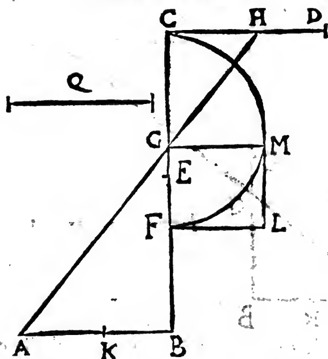
Datis duabus lineis AB, CD, cum CB, vt supra. Ducere AGH, vt triangula CGH, AGB, sint æqualia spatio dato.

SPatio dato esto æquale quadratum rectæ Q; & fiat vt AB, ad Q, sic Q, ad aliam. Hæc vel erit

erit æqualis dimidiæ B C, vel minor, vel maior. Si est æqualis B G, dimidiæ B C, ducatur A G H. Dico triangula æquari quadrato Q. Quod est luce clarius. Nam cum rectangulum A B G, duplum sit trianguli A B G. Ergo rectangulum A B G; nempe quadratum Q, erit æquale triangulis, &c.

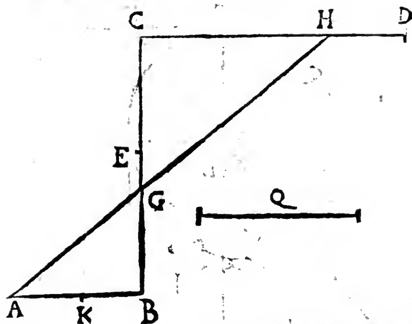
Si vero illa tertia proportionalis sit minor dimidia B C, sit hæc B F, minor B E, dimidia B C. Hæc autem, vel est adeo minor B E, vt rectangulum C B, E F, maius sit quarta parte quadrati C F: & tunc, vt patet ex schol. proposit. 34. problema nequit construi. Vel rectangulum C B, E F, est æquale quartæ parti quadrati C F. Et tunc, diuisa C F, bifariam in G, & ducta A G H; patet ex prop. ant. duo triangula æqualia esse rectangulo A B F; nempe quadrato Q. Vel tandem illa tertia, est adeo minor, vt rectangulum C B, E F, minus sit quarta parte quadrati C F. Et tunc, super diametro C F, facto semicirculo C M F, & inuenta media proportionali inter C B, E F, erigatur ei æqualis F L, à puncto F, perpendicularis super C B; & per punctum L, ducatur L M, parallela C B, occurrens periphæriæ in M (occurret enim, quia rectangulum C B, E F, nempe quadratum F L, minus est quarta parte quadrati C F; nempe quadrato dimidiæ C F) & à puncto M, cadat M G, perpendicularis super C B, ac ducatur A G H. Dico triangula C G H, A G B, esse quæsita.

Nam cum rectangulum C G F, sit æquale quadrato



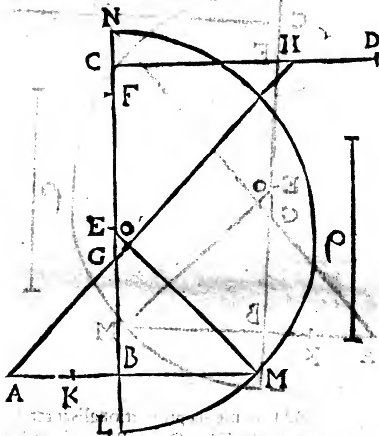
drato GM; nempe quadrato FL; nempe rectangulo CB, EF. Ergo ad modum superiorum concludemus, triangula esse æqualia rectangulo ABF; nempe quadrato Q.

Si vero illa tertia proportionalis sit maior BE. Vel erit æqualis CB, vel minor, vel maior. Si sit æqualis; inter BC, CE, sit media proportionalis CG; & per G, agatur AGH. Dico triangula ad verticem, æqualia esse rectangulo ABC; nempe quadrato Q. Nam, cum quadratum CG, sit æquale rectangulo BCE. Ergo etiam duo quadrata CG, erunt æqualia duplo rectangulo BCE; nempe



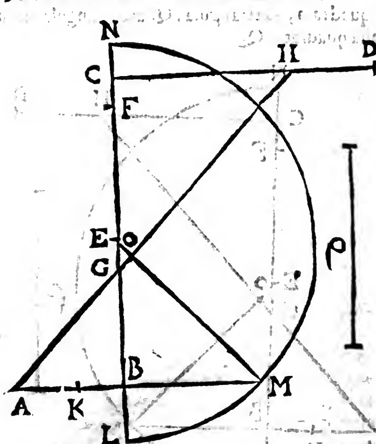
pe quadrato CB. Additoque communi alio quadrato CB. Ergo duo quadrata BC, erunt æqualia quadrato BC, & duobus quadratis CG. Ablatisque hinc inde duobus rectangulis BCG. Ergo duo rectangula CBG, erunt æqualia duobus quadratis CG, GB. Ergo concludemus vt prius, duo quadrata CG, GB, & duo rectangula CBG, ad duo rectangula ABC, habere eandem rationem. Sed duo rectangula CBG, sunt ad duo rectangula ABC, vt GB, ad BA. Ergo quadrata CG, GB, erunt ad duo rectangula ABC, vt GB, ad BA. Et ad consequentium dimidia: quadrata CG, GB, erunt ad rectangulum A B C; nempe ad quadratum Q, vt GB, ad BK; nempe, ex supra dictis, vt eadem

dem quadrata, ad triangula. Quare triangula erunt æqualia quadrato Q.



Si vero illa tertia proportionalis sit minor BC, sit hæc BF, quæ diuidatur bifariam in O; erectaque à puncto B, normali BM, æquali mediæ proportionali inter CE, medietatem CB, & FE, iunctaque OM, centro O, interuallo OM, describatur semicirculus secans CB, productam in L. Patet BL, minorem esse EB, dimidia totius CB.

N Nam



Nam cum BM, ſit media proportionalis inter CE, EF, erit minor ipſa CE. Quare BL, minor BM, erit multo minor CE, ſeu EB. Fiat ergo ipſi BL, æqualis EG, & per A, G, agatur AGH. Dico triangula AGB, CGH, eſſe quæſita.

Quoniam enim rectangulum NBL, eſt æquale quadrato BM, & rectangulo NBL, eſt æquale rectangulum FLB (quia tam NF, BL, quam NB, FL, ſunt æquales). Ergo rectangulum FLB, nempe

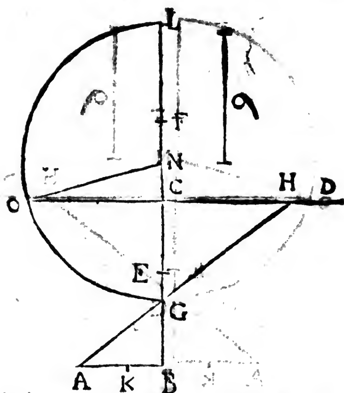
pe

pe rectangulum F B L, cum quadrato B L, erit æquale quadrato B M. Sed quadratum B M, ex constructione, est æquale rectangulo C E F; & rectangulum F B L, cum quadrato B L, est æquale rectangulo sub F B, in E G, simul cum quadrato E G (quia E G, B L, factæ sunt æquales). Ergo rectangulum F B, E G, cum quadrato E G, erit æquale rectangulo C E F. Omnibusque quadruplicatis; quatuor rectangula F B, E G, cum quatuor quadratis E G, erunt æqualia quatuor rectangulis C E F; nempe duobus rectangulis sub C B, in E F. Et communibus additis duobus rectangulis C B E. Ergo quatuor rectangula F B, E G, cum quatuor quadratis E G, & cum duobus rectangulis C B E, erunt æqualia duobus rectangulis C B, E F, & duobus rectangulis C B E; nempe erunt æqualia duobus rectangulis C B F. Hinc inde vero ablatis duobus rectangulis sub F B, in C G. Ergo duo rectangula F B G (residuum duorum rectangulorum C B F,) erunt æqualia duobus rectangulis F B, E G, quatuor quadratis E G, & duobus rectangulis F C E, quæ remanent de illis sex rectangulis, cum quatuor quadratis &c. Nam duo rectangula C B E, seù B C E, diuiduntur in duo rectangula B F, C E, & in duo rectangula F C E; coniungendo vero simul duo rectangula B F, C E, cum duobus rectangulis F B, E G, fiunt duo rectangula F B, C G. Verum quoniam supra probatum est, rectangulum F B, E G, cum quadrato G E, æquari rectangulo

CEF. Ergo duo rectangula FB, EG, cum duobus quadratis EG, erunt æqualia duobus rectangulis CEF. Ergo duo rectangula FBG, erunt æqualia duobus rectangulis FCE, duobus rectangulis FEC, (nempe duobus quadratis CE) & duobus quadratis EG. Sed duo quadrata CE, cum duobus quadratis EG, ex proposit. 9. secundi Element. æqualia sunt quadratis CG, GB. Ergo duo rectangula FBG, erunt æqualia quadratis CG, GB. Ergo hæc ad duo rectangula ABF, erunt in eadem ratione. Sed duo rectangula FBG, sunt ad duo rectangula ABF, vt GB, ad BA. Ergo & quadrata CG, GB, erunt ad duo rectangula ABF, vt GB, ad BA. Et ad consequentium dimidia. Ergo quadrata erunt ad rectangulum ABF, nempe ad quadratum Q, vt GB, ad Bk; nempe ex supra dictis, vt eadem quadrata, ad triangula. Ergo triangula sunt æqualia quadrato Q.

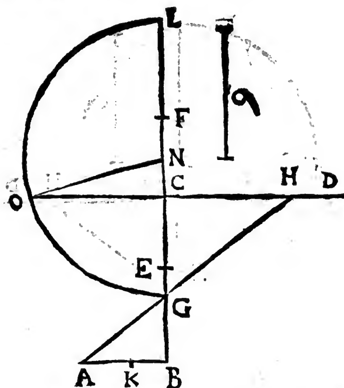
Tandem BF, sit maior BC; & FC, secetur bifariam in N; & à puncto C, erigatur normalis CO, ipsi FB, quæ sit media proportionalis inter BC, FE, & iungatur NO. Deinde centro N, interuallo NO, describatur semicirculus secans CB, in G (secabit enim semper, vt probabitur inferius) & ducatur AGH. Dico triangula AGB, CGH, esse quæsita.

Quoniam enim LF, æquatur CG, ergo rectangulum LCG, æquatur rectangulo FGC. Sed rectangulum LCG, est etiam æquale quadrato OC, quod



quod factum est æquale rectangulo ſub F E, in C B. Ergo rectangulum F G C, erit æquale rectangulo F E, C B. Duplumque erit æquale duplo. Et communi addito duplo rectangulo C B E. Ergo duplum rectangulum F G C, cum duplo rectangulo C B E, erunt æqualia duobus rectangulis C B, F E, & duobus C B E, nempe erunt æqualia duobus rectangulis F B C. Et hinc inde ablatis duobus rectangulis F B, C G. Ergo reſiduum duorum rectangulorum F G C, & duorum rectangulorum C B E, ſeù quadrati C B,

æqua-



æqualis prædictis duobus rectangulis C B E, ablatis ab his planis prædictis duobus rectangulis FB, CG, erit æquale duobus rectangulis FBG, quæ remanent si à duobus rectangulis FBC, auferantur prædicta duo rectangula FB, CG. Sed residuum duorum rectangulorum FGC, & quadrati CB, ab ipsis demptis duobus prædictis rectangulis sunt quadrata CG, GB. Nam quadratum BC, æquatur duobus quadratis BG, GC, & duobus rectangulis BGC, quæ duo rectangula coniuncta cum duobus

rectan-

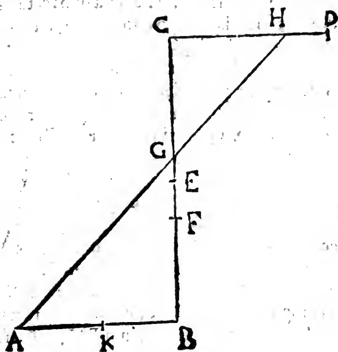
rectangulis FGC, faciunt prædicta duo rectangula FB, CG, auferenda. Ergo duo rectangula FBG, erunt æqualia quadratis CG, GB. Ergo hæc ad duo rectangula ABF, erunt in eadem ratione. In reliquis sequantur præcedentes demonstrationes, & eodem modo concludemus triangula ad verticem æquari quadrato Q. Quare in omnibus casibus constructa sunt triangula æqualia quadrato Q. Quod erat faciendum.

Quod vero assumptum est, nempe semicirculum semper secare CB, in G, seù quod idem est, NO, minorem esse NB, patet: quia quadratum NO, seù quadrata NC, CO, seù quadratum NC, cum rectangulo FE, CB, minora sunt quadrato NB. Nam rectangulum FE, CB, diuiditur in rectangulum NE, CB, & in rectangulum FN, CB, seù NCB. Patet autem quadratum NC, cum rectangulis NCB; NE, CB, minora esse quadrato NB.

SCHOLIVM I.

Ex dictis ergo licuit animaduertere, semper duo triangula ad verticem æqualia probata esse rectangulo sub AB, in BF, quæ BF, est tertia proportionalis ipsarum AB, & Q; quæ cum augeatur ad augmentum dati quadrati Q, quod postea augeri potest in infinitum; patet etiam duo triangula ad verticem augeri posse in infinitum, adeo vt numquam deueniatur ad maxima. Secus dicendum est

dé



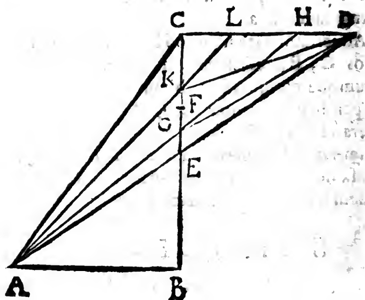
de minimis. Nam cum visum sit, quod si BF, sit adeo minor BE, dimidia CB, vt rectangulum CB, EF, maius sit quarta parte quadrati CF, problema nequeat construi; & tunc solum sit construibile, quando BF, est taliter minor BE, vt rectangulum CB, EF, sit quarta pars quadrati CF, patet triangula sic inuenta esse omnium minima. Si quis ergo iubeat inuenire minima triangula, ei satisfaciemus sic. Diuisa CB, bifariam in E, rursum taliter secetur in F, inter E, B, vt rectangulum CB, EF, sit quarta pars quadrati CF; diuisaque CF, bifa-

bifariam in G, ducatur AGH. Hæc conſtituet triangula minima.

Aduertatur autem, quod licet ſuppoſitum ſit angulos C, B, rectos eſſe, nihilominus ſi etiam ſint vtcumque obliqui, habebimus intentum, ducendo perpendicularem inter CD, AB, & circa ipſam operando, vt factum eſt ſupra; poſtea CB, obliquam ſecando proportionaliter in G, ſicuti fuerit diuiſa normalis in ſimile puncto. Ducendo enim eodem modo AGH, habebimus intentum.

SCHOLIVM II.

Vt viſum eſt in ſcholio antecedenti, duo triangula ad verticem poſſunt quidem augeri in infinitum, ſed non in infinitum minui, quia tandem deuenitur ad triangula minima. Licet tamen notare accidens quodam non ſpernendum, quod in talibus triangulis reperitur. Et eſt, quod ſi CB, ſit ſecta bifariam in E, & ſit ducta AED, vtique triangula CED, AEB, ſunt minora triangulorum omnium, quæ conſtituerentur à linea ſecante EB, & ſunt maiora omnium conſtitutorum à linea ſecante CE. At non eodem modo ſunt maiora, & minora: nam quo magis linea ſecans EB, appropinquatur puncto B, eo magis triangula CED, AEB, ſunt illis triangulis minora: non vero eo fiunt maiora triangulis ſuperioribus, quo magis linea ſecans CE, appropinquatur puncto C; ſed



dum linea secans CE, discedit ab AED, semper duo triangula decrescunt, vsque dum deueniatur ad duo minima CGH, AGB, (supponendo ipsa minima esse) progrediendo autem versus C, rursum triangula crescunt vsque dum perueniatur ad punctum C, vbi triangula degenerant in triangulum ACB, quod vtique est æquale triangulis AEB, CED; quia cum triangula CED, ACE, propter æqualitatem ipsarum AE, ED, sint æqualia, ergo totum triangulum ACB, erit æquale triangulis CED, AEB. Patet ergo, quod si CE, intelligatur sic diuisa in F, vt transeunte linea per A, F, constituantur triangula omnium minima, & diuidatur linea AGH, secante FE, quod

etiam

etiam poteſt diuidi linea AKL, ſecante CF, vt duo triangula CkL, AkB, ſint æqualia triangulis CGH, AGB. Quod vtique fiet, ſi ducta GD, (cum triangulum HGD, non ſit omnium maximum) ex ſchol. propoſit. 28. inueniatur triangulum LKD, ei æquale. Nam triangula CKL, AkB, erunt æqualia triangulis CGH, AGB. Ratio eſt, quia duo triangula CFD, AEB, ſuperant duo triangula CGH, AGB, quantitate trianguli HGD: & pariter ſuperant triangula CKL, AKB, quantitate trianguli LkD; cum ergo exceſſus, ex conſtructione, nempe triangula LKD, HGD, ſint æquales. Ergo etiam reliqua triangula erunt æqualia.

Explicauimus diligenter ſuperiora, quia ex ipſis dependet ſolutio Problematis non ſpernendi. Problema autem tale eſt. Datis omnibus, quæ ſupra, & ducta AGH; ducere AkL, vt trapezium kGHL, ſit æquale triangulo KAG. Etenim factis omnibus, quæ ſupra; cum triangula CGH, AGB, ſint æqualia triangulis CkL, AkB; ablatis communibus triangulis CkL, AGB. Ergo reliquum trapezium k, GHL, erit æquale triangulo AkG.

SCHOLIVM III.

Sed tandem vt huic problemati finem imponamus, & ſimul cum ipſo, etiam primo libro infinita-

rum parabolarum, applicentur etiam prædicta nostro instituto. Nempe datis vt supra, ducere AGH, vt quæcumque semiparabolæ, quarum diametri CG, GB, bases CH, AB, sint dato spatio æquales. Nam si fiat vt numerus parabolæ, ad dimidium numeri parabolæ cum dimidia vnitate, sic spatium datum, ad aliud: si huic inueniantur triangula æqualia modo prædicto, quibus intelligantur circumscriptæ semiparabolæ; hæ erunt æquales spatio dato. Si vero triangula non sint reperibilia, nec etiam erunt reperibiles semiparabolæ.

Explicit Liber Primus.



DE INFINITIS PARABOLIS, ETC.



LIBER SECVNDVS.

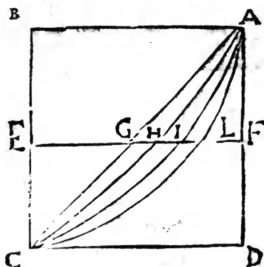


Icuti libro ſuperiori explicatæ fuere infinitæ parabolæ, ac infinita trilinea, infinitaque horum ſegmenta; ſic in præſenti explicanda veniunt infinita ſolida, quæ ex varijs rotationibus prædictarum figurarum ortum ducunt. Concipiamus ergo in ſchemate poſito initio ſuperioris libri, infinitas ſemiparabolas BAC, BAHC, BAIC, BALC, &c. rotari circa diametrum BA, donec redeant ad initium motus.

DEFINITIO PRIMA.

Talia ſolida ex tali rotatione genita, vocentur infinita Conoidea parabolica.

DE-



DEFINITIO SECVNDA.

Sed si tales infinitæ semiparabolæ duplicatæ ad partes BA, concipiantur rotari circa basim BC, duplicatam. Talia solida vocentur infiniti Fusi parabolici.

DEFINITIO TERTIA.

Si vero concipiamus tales infinitas parabolas rotari circa DA, ipsas in vertice tangentem. Solida genita vocentur infiniti Annuli stricti parabolici secundum rectitudinem basis.

DE-

DEFINITIO QVARTA.

Si autem infinitæ parabolæ rotentur circa CD, diametro parallelam. Talia solida vocentur infiniti Annuli parabolici stricti secundum rectitudinem diametri.

DEFINITIO QVINTA.

Sed concipiamus infinita trilinea ACD, AHCD, AICD, ALCD, &c. rotari circa diametrum AD. Talia solida vocentur infiniti Conici circa diametrum.

DEFINITIO SEXTA.

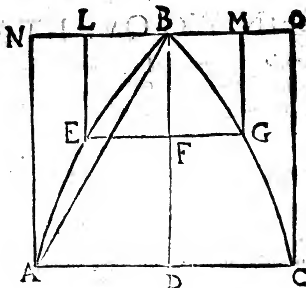
Si vero rotentur circa basim CD. Vocentur infiniti Conici circa basim.

Hi sunt termini, qui in præsenti fuerunt explicandi; reliqui vel erunt omnibus obuij, vel explicabuntur proprijs in locis.

PROPOSITIO I.

Si quodlibet ex infinitis conoidibus parabolicis secetur plano basi parallelo. Erit totum conoides, ad conoides ad verticem, vt potestas semidiametri circuli suæ basis duplici gradu altior potestate conoidis, ad similem potestatem semidiametri basis conoidis ad verticem.

Esto



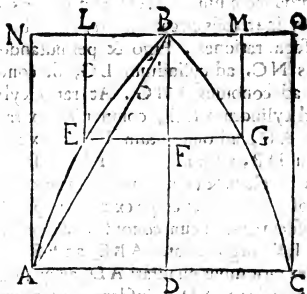
ESto Conoides quodlibet parabolicum ABC, genitum ex reuolutione semiparabolæ BAD, circa diametrum BD; quod secetur plano EFG, basi parallelo. Dico conoides ABC, esse ad conoides EBG, ad verticem, vt potestas AD, duplici gradu altior potestate conoidis, ad similem potestatem EF. V.g. in primo conoide, nempe in cono, vt cubus AD, ad cubum EF. In secundo, nempe in conoide ordinario, vt quadratoquadratum AD, ad quadratoquadratum EF; & sic in infinitum. Ipsis conoidibus intelligamus circumscriptos cylindos NC, LG. Ergo cylindrus NC, ad conoides ABC, erit vt cylindrus LG, ad conoides EBG; quia figuræ eiusdem generis, nempe semiparabolæ, eodem modo reuolutæ, nequeunt

queunt

queunt producere nisi solida eiusdem generis, ac proinde cylindri ipsis circumscripti, retinebunt ad ipsas easdem rationes. Ergo & permutando, vt cylindrus NC, ad cylindrum LG, sic conoides ABC, ad conoides EBG. At ratio cylindri NC, ad cylindrum LG, componitur ex ratione quadrati AD, ad quadratum EF, & ex ratione AN, seù DB, ad EL, seù ad BF, vt facile elicietur ex 12. elem. & vt inferius à nobis probabitur in proposit. 9. huius, nempe ex ratione potestatis AD, eiusdem gradus cum conoide, ad similem potestatem EF. Ergo & ratio ABC, ad EBG, componetur ex rationibus quadrati AD, ad quadratum EF, & potestatis AD, eiusdem gradus cum conoide, ad similem potestatem EF. At ex istis duabus rationibus coalescit ratio potestatis AD, dupli ci gradu altioris potestate conoidis, ad similem potestatem EF. Quare patet propositum. Quod &c.

SCHOLIVM.

Non solum autem erunt in prædicta ratione talium potestatum AD, EF, solida prædicta, sed etiam solidum ex trilineo NBA, circa BD, ad solidum ex trilineo ad verticem LBE, circa BF. Item solidum ex figura NLEFDA, circa BD, ad solidum ex segmento AEFD, circa FD. Item ductis BE, BA, solidum ex portione contenta sub re-



cta, & curua AB, circa BD, ad solidum ex portione contenta sub recta, & curua EB, circa BD. Primum patet, quia cum sit vt totus cylindrus ex ND, ad totum cylindrum LG, sic ablatum conoides ABC, ad ablatum conoides EBG. Ergo reliquum, nempe solidum ex trilineo NBA, circa BD, erit ad reliquum, nempe ad solidum ex trilineo ad verticem LBE, circa BD, vt totum ad totum.

Eodem modo patet secundum. Quia cum sit vt totus cylindrus NC, ad totum conoides ABC, sic ablatus cylindrus LG, ad ablatum conoides EBG; ergo & reliquum, nempe solidum ex NLEFDA, circa BD, erit ad reliquum, nempe ad frustum conoidale AEGC, vt totum ad totum.

Facile etiam patebit tertium. Quia cum sit vt totum

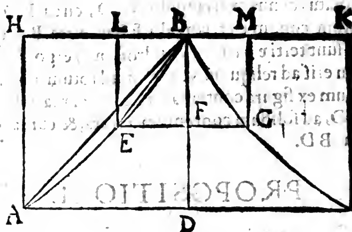
totum conoides ABC, ad totum conoides EBG, sic ablatus conus ex triangulo ABD, circa BD, ad ablatum conum ex triangulo EBF, circa BF (quia con sunt tertiæ partes cylindrorum;) ergo & reliquum erit ad reliquum vt totum ad totum; nempe solidum ex figura contenta à recta, & curua AB, circa BD, ad solidum contentum à recta, & curua EB, circa BD.

PROPOSITIO II.

Si quilibet ex infinitis Conicis circa diametrum secetur plano basi parallelo. Erit totus conicus ad conicum ad verticem, vt potestas diametri conici, cuius numerus sit duplus vnitate auctus numeri conici, ad similem potestatem diametri conici ad verticem.

ESto Conicus ABC, ortus ex rotatione trilinei ABD, circa diametrum BD, sectus plano EG, AC, parallelo Dico conicum ABC, esse ad conicum EBG, vt potestas DB, cuius numerus sit duplus vnitate auctus numeri conici, ad similem potestatem BF. V. g. in primo conico, vt cubus ad cubum. In secundo, vt quadratocubus ad quadratocubum. In tertio, vt quadratoquadratocubus, ad quadratoquadratocubum; & sic in infinitum.

Conicis circumscribantur cylindri HC, LG. Eodem modo, quo factum est in proposit. ant. probabimus, esse cylindrum HC, ad cylindrum LG,



vt conicus ABC, ad conicum EBG. Sed ratio cylindri HC, ad cylindrum LG, componitur ex ratione quadrati AD, seù HB, ad quadratum EF, seù LB, & ex ratione AH, ad EL. Ergo & ratio conici ABC, ad conicum EBG, componetur ex ijsdem rationib.s. Verum cum sit, ex genesi parabolæ, vt HB, ad BL, sic potestas HA, eiusdem gradus cum parabola, ad similem potestatem LE. Ergo & vt quadratum HB, ad quadratum LB, sic potestas AH, cuius numerus sit duplus potestatis parabolæ, seù conici, ad similem potestatem LE. Ergo ratio conici ad conicum componetur ex ijsdem rationibus. At ex illis rationibus, componitur etiam ratio potestatis HA, seù BD, cuius numerus sit duplus vnitate

auctus

auctus numeri conici, ad similem potestatem LE, seù BF. Ergo &c. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Etiam in præsenti propositione, non solum erit in eadem ratione prædictæ potestatis DB, ad illam potestatem BF, conicus ABC, ad conicum EBG; sed etiam annulus strictus ex semiparabola HBA, circa BD, ad annulum strictum ex semiparabola LBE, circa BF. Item solidum ortum ex figura HLEFDA, circa DB, ad frustum AEGC. Pariter, ductis EB, AB, solidum ex figura contenta à recta, & curua AB, circa BD, ad solidum ex figura contenta à recta, & curua EB, circa BF. Quæ etiam eodem modo patebunt sicuti ibidem.

SCHOLIVM II.

Ex dictis ergo in duabus superioribus propositionibus, & in propositione tertia primi libri, possumus considerare pulcherrimas series, & ordinata incrementa proportionum, quæ reperiuntur inter infinitas parabolas, infinita trilinea, infinita conoidea parabolica, & infinitos conicos. Nam si infinitæ parabolæ, seù semiparabolæ v.g. HBA, secentur LE, basi HA, parallela semiparabolę HBA, ad semiparabolas LBE, retinent talem perennem

reonem proportionem, vt in prima parabola ſit in duplicata ratione H A, ad L E. In ſecunda in triplicata. In tertia in quadruplicata, & ſic in infinitum Idem intelligendum eſt ſi trilineum ABD, ſecetur E F, reſpectu proportionis diametri D B, ad diametrum B F. In conoide autem genito ex ſemiparabola H B A, circa diametrum H B, & ſecto vt dictum eſt. Conoides primum ex H B A, ad conoides ex L B E, eſt in triplicata ratione H A, ad L E. Secundum ad ſecundum in quadruplicata. Tertium ad tertium in quintuplicata, & ſic in infinitum. At in conicis ex infinitis trilineis circa diametrum, non ſeruatur incrementum exponentium per vnitatem, vt in præcedentibus, ſed per binarium, adeo vt in primo conico ſit, conicus A B C, ad conicum E B G, in triplicata ratione D B, ad BF. In ſecundo in quintuplicata. In tertio in ſeptuplicata. Et ſic in infinitum.

SCHOLIVM III.

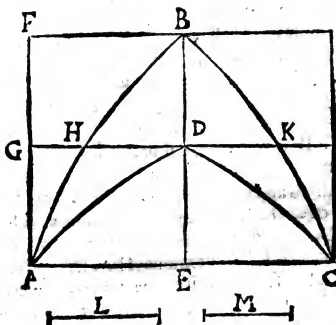
Verum antequam diſcedamus ab hac propoſitione, notetur etiam ſi placet, quod ſi quælibet ex infinitis parabolis, vel quodlibet ex infinitis trilineis; Item quodlibet ex infinitis conoidibus parabolicis, ſeu quilibet ex infinitis conicis circa diametrum, ſecentur, vt dictum eſt ſupra; nec parabola, & trilineum ad verticem, nec conoides, & conicus ad verticem, erunt magnitudines ſimiles ſuis magnitudinibus,

dinibus, nisi tantum in primo gradu parabolarum, trilineorum, conoideorum, & conicorum. Ratio est; quia cum nobilis Geometra Bonauentura Caualerius lib. 2. Geomet. Indiuis. proposit. 15. & 17. vniuersalissime ostendet id, quod in aliquibus casibus, & in magnitudinibus particularibus ab alijs ostenditur: nimirum, omnia similia plana, esse in duplicata proportione homologorum laterum; omniaque similia solida esse in triplicata tali ratione: ex dictis apparet, solam primam semiparabolam ABH, & solum primum trilineum ABD, nempe triangula, esse ad triangula LBE, EBF, vt quadratum HA, seu DB, ad quadratum LE, seu BF. Reliquas vero semiparabolas, sicuti reliqua trilinea, in triplicata, in quadruplicata &c. Item ex dictis apparet, solum primum conoides ex HBA, circa HB, & primum conicum ex ABD, circa BD, nempe conos, esse ad conoides ex LBE, & ad conicum EBG, vt cubus HA, seu DB, ad cubum LE, seu BF. Reliqua vero conoidea, in quadruplicata, in quintuplicata &c. Item reliquos conicos, in quintuplicata, in septuplicata &c. Quare patet propositum.

PRO-

PROPOSITIO III.

Conoidea parabolica eiusdem generis, & conici eiusdem generis, & circa diametrum, quorum eadem basis, sunt in ratione suarum diametrorum.



SInt duo conoidea parabolica eiusdem generis ABC, ADC, quorum eadem basis AEC. Dico conoides ABC, esse ad conoides ADC, vt BE, ad ED. Ipsis intelligamus circumscriptos cylindros FC, GC. Facile patebit ex dictis, esse conoides ABC, ad conoides ADC, vt cylindrus FC, ad cylindrum GC. At cylindrus FC, est,

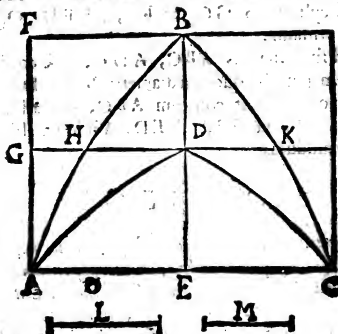
est ad cylindrum GC, vt BE, ad ED. Quare patet primum.

Sed supponamus ABC, ADC, esse conicos eiusdem generis, quorum diametri BE, ED. Eodem modo patebit, conicum ABC, esse ad conicum ADC, vt BE, ad ED. Vnde patebit etiam secundum.

PROPOSITIO IV.

Si conoides parabolicum quodcumque secetur plano, basi parallelo; & super eadem basi, & circa diametrum frusti conoidalis, sit aliud conoides eiusdem generis. Erit frustum, ad conoides, quod includit, vt tot continuè proportionales in proportione semidiametri maioris basis frusti, ad semidiametrum basis minoris, incipiendo à prima inclusiuè, quotus est numerus conoidis auctus binario, ad easdem proportionales, vltimis duabus minoribus exceptis.

ESto conoides parabolicum quodcumque ABC, quod sit sectum plano HDK, basi parallelo; & intelligatur aliud conoides ADC; ratio autem AE, ad HD, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum conoidis ternario, sitque M, vltimus minimus terminus, L, vero sit terminus superans numerum conoidis vnitate. Dico frustum AHKC, esse ad conoides ADC, vt AE, HD, & cæteræ tot proportionales, quotus est

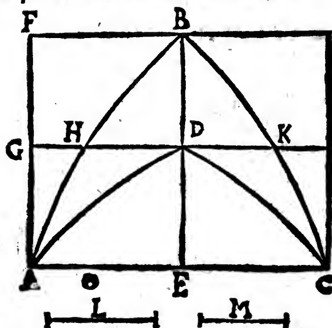


numerus conoidis binario auctus nempe, vt omnes proportionales, vltima M, excepta, ad easdem, duabus vltimis minimis exceptis. V.g. in primo conoide, vt AE, HD, cum tertia proportionali; ad AE. In quadratico, vt AE, HD, cum duabus alijs, ad AE, HD. In cubico, vt AE, HD, cum tribus, ad AE, HD, cum tertia; & sic in infinitum.

Quoniam enim ex proposit. 1. huius, conoides ABC, est ad conoides HBK, vt potestas AE, duplici gradu altior potestate conoidis, ad similem potestatem HD; nempe vt AE, ad M; ergo & per conuersionem rationis, & conuertendo, erit vt excessus AE, supra M, ad AE, sic fru-

stum

ſtum AHKC, ad conoides ABC. Rurſum, quoniam conoides ABC, eſt ad conoides ADC, vt BE, ad ED; & quoniam arguendo per conuerſionem rationis, eſt vt BE, ad ED, ſic poteſtas AE, eiuſdem gradus cum conoide, ad exceſſum ipſius ſupra ſimilem poteſtatem HD; nempe ſic AE, ad exceſſum ipſius ſupra L. Ergo ex æquali, erit fruſtum AHKC, ad conoides ADC, vt exceſſus AE, ſupra M, ad exceſſum AE, ſupra L. Verum quoniam ex ſcholio. propoſit. 7. pri. exceſſus AE, ſupra M, æquatur omnibus exceſſibus omnium proportionalium; exceſſus autem AE, ſupra H, æquatur omnibus exceſſibus, duobus vltimis exceptis; & cum omnes proportionales excedant numerum conoidis ternario, omnes exceſſus ſuperabunt eundem numerum binario; & cum proportionales vſque ad L, incluſiuè, excedant numerum conoidis vnitate, exceſſus AE, ſupra L, æquabitur tot exceſſibus quotus eſt numerus conoidis Ergo AHkC, erit ad ADC, vt tot exceſſus proportionalium, quotus eſt numerus conoidis binario auctus, ad tot exceſſus, quotus eſt numerus conoidis. Verum ex propoſit 7. primi, cum exceſſus magnitudinum continuè proportionalium, ſint proportionales, & in eadem proportione cum totis magnitudinibus; vnde eſt vt tot exceſſus, ad tot exceſſus, ſic tot proportionales homologæ antecedentibus exceſſibus, ad tot proportionales homologas conſequentibus exceſſibus. Ergo fruſtum AHKC, erit ad conoi-



des ADC, vt AE, HD, & cæteræ tot proportionales, quarum numerus excedat numerum conoidis binario, ad illas easdem proportionales, duabus vltimis exceptis; nempe ad tot proportionales, quarum numerus æquetur numero conoidis. Quod, &c.

COROLLARIVM.

Ergo diuidendo, erit excessus frusti supra conoides, ad ipsum, vt duæ vltimæ minores proportionales, ad alias; nempe ad AE, & cæteras tot numero, quotus est numerus conoidis.

SCHO-

SCHOLIVM I.

Inferius suo loco etiam assignabitur ratio frusti, ad cylindrum G C, sibi circumscriptum.

SCHOLIVM II.

Ex dictis remanet probata propositio, quam habent Lucas Valerius lib. 1. de centro grau. proposit. 10. & Ricardus Albius in suo hemisphærio dissecto prop. 16. & forsitan alij, quorum non meminimus. Nimirum, frustum conicum A H k C, esse ad conum A D C, vt A E, H D, cum tertia proportionali L, ad A E. Pariter ex hac probari potest ea, quam habet idem Lucas Valerius lib. 3. proposit. 10. Nimirum frustum conicum, esse ad conum, vt rectangulum A E, H D, cum tertia parte quadrati A O (si A O, sit excessus A E, supra H D,) ad tertiam partem quadrati A E. Cum enim probatum sit, frustum conicum, esse ad conum, vt A E, H D, & tertia proportionalis L, ad A E; ergo & ducendo omnia in A E, erit frustum ad conum, vt quadratum A F, rectangulum A E, H D, & rectangulum A E, L (nempe quadratum H D) ad quadratum A E; nempe quadrata A E, E O, & rectangulum A E O, ad quadratum A E. Ergo & frustum, erit ad conum, vt tertia pars antecedentis, ad tertiam partem consequentis. Sed tertia pars quadratorum A E, E O, & rectanguli

ctanguli A E O, est rectangulum A E O, & tertia pars quadrati A O: (nam cum quadratum A E, sit æquale rectangulis A E O, A O E, & quadrato A O; & cum rectangulum A O E, cum quadrato O E, faciat rectangulum A E O. Ergo, quadrata A E, E O, & rectangulum A E O, æquabuntur tribus rectangulis A E O, & quadrato A O: quorum tertia pars, erit rectangulum A E O, & tertia pars quadrati A O.) Ergo frustum, erit ad conum, vt rectangulum A E O, seu A E, H D, cum tertia parte quadrati A O, ad tertiam partem quadrati A E.

PROPOSITIO V.

Si quilibet ex infinitis conicis circa diametrum, secetur plano basi parallelo, & super eadem basi cum ipso, & circa diametrum frusti intelligatur alius conicus eiusdem generis. Erit frustum ad conicum, quem includit, vt tot proportionales continuè in ratione diametri conici, ad diametrum conici ad verticem, quarum maxima sit diameter conici, vt earum numerus excedat duplum numerum conici vnitate, ad diametrum conici.

SEd in schemate propositionis antecedentis, intelligamus A B C, A D C, esse conicos circa diametros B E, E D. Dico frustum A H K C, esse ad conicum A D C, vt E B, B D, & cæteræ tot continuè proportionales, vt earum numerus excedat duplum numerum conici vnitate, ad E B. V. g. in pri-

in primo conico, erit vt EB, BD, cum tertia proportionali, ad EB. In secundo, vt 5. proportionales, ad EB. In tertio, vt 7. proportionales, ad EB; & sic in infinitum. Ratio EB, ad BD, continuetur in tot terminos, vt eorum numerus excedat duplum numerum conici binario; sitque vltimus minimus terminus M. Quoniam enim ex proposit. 2. huius, conicus ABC, est ad conicum HBk, vt potestas EB, cuius numerus excedat duplum numerum conici vnitate, ad similem potestatem BD; nempe vt BE, ad M. Ergo per conuersionem rationis, & conuertendo, erit frustum AHKC, ad conicum ABC, vt excessus BE, supra M, ad BE. Sed conicus ABC, est ad conicum ADC, ex 3. huius. vt BE, ad ED. Ergo ex æquali, erit frustum AHkC, ad conicum ADC, vt excessus EB, supra M, ad ED. At excessus EB, supra M, ex sæpe dictis, æquatur omnibus excessibus omnium proportionalium; qui, cum numerus proportionalium; excedat numerum duplum conici binario, excedent duplum numerum conici vnitate; ED, vero est excessus primæ EB, supra secundam BD; & cum ex 7. pri. sit vt tot excessus, ad primum excessum, sic EB, & cæteræ tot proportionales, quarum numerus excedat duplum numerum conici vnitate, ad EB. Ergo & frustum AHkC, erit ad conicum ADC, vt EB, cum illis ceteris proportionalibus, ad EB. Quod ostendere oportebat.

CO-

COROLLARIVM.

Ergo diuidendo, erit exceſſus fruſti ſupra conicum, ad ipſum, vt cæteræ proportionales abſque prima, ad primam.

SCHOLIVM I.

Etiam fruſti ad cylindrum GC, ſibi circumſcriptum, inferius ſuo loco aſſignabitur ratio.

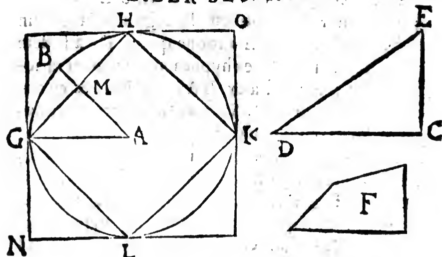
SCHOLIVM II.

Pariter etiam ex dictis in hac propoſitione, remanent probatæ propoſitiones Lucę Valerij, & Albij, de quibus loquuti ſumus ſcholio 2. propoſit. ant. Nam ex dictis, cum fruſtum conicum, ſit ad conum ADC, vt EB, BD, cum tertia proportionali, ad EB; & cum in cono, ſit vt EB, ad BD, ſic AE, ad HD. Ergo fruſtum erit ad conum, vt AE, HD, cum harum tertia proportionali, ad AE.

PROPOSITIO VI.

Circulus ad quodlibet triangulum rectangulum, habet rationem compoſitam, ex ratione ſemidiametri, ad vnum laterum circa rectum, & ex ratione circumferentiæ, ad aliud latus circa rectum.

Eſto



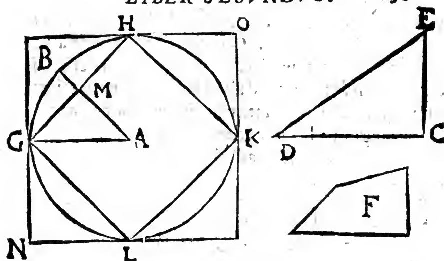
Esto circulus, cuius ſemidiameter A B, & triangulum rectangulum, cuius angulus rectus, qui ad C. Dico circulum, ad triangulum, habere rationem compoſitam ex ratione A B, ad alteram ipſarum D C, C E, putà C E, & ex ratione circumferentiæ, ad D C.

Si non, vel circulus ad triangulum eſt in maiori, vel in minori ratione quam ſit ea compoſita. Sit primo in maiori. Ergo aliquid circulo minus, erit ad triangulum in æquali ratione ei compoſitæ. Sit hoc ſpatium F, & in circulo inſcribatur figura æqualium laterum, minus deficiens à circulo quam ab ipſo deficiat ſpatium F. Quomodo autem hoc fiat, geometris eſt nimis familiare. Sit ergo hæc figura inſcripta, nè entia multiplicemus, ipſum quadratum G H K L, & A B, ſemidiameter diuidat G H, biſariam, & ad angulos rectos in M. Quoniam

R quadra-

quadratum HL, maius eſt F, ergo ad triangulum DEC, erit in maiori ratione quam F, ad idem triangulum; nempe, ex hypotheſi, in maiori ratione quam ſit compoſita ex BA, ad EC, & ex circumferentia, ad DC. Sed ratio quadrati, ad triangulum (& ſic cuiuſcumque figuræ inſcriptæ euidenter in circulo) componitur ex ratione MA, ad CE, & ex ratione perimetri quadrati, ad DC, vt facile patet. Ergo ratio compoſita ex MA, ad CE, & ex perimetro quadrati, ad DC, erit maior compoſita ex BA, ad CE, & ex circumferentia ad DC. At ratio MA, ad CE, minor eſt ratione BA, ad eandem CE. Ergo ratio perimetri quadrati, ad DC, erit multo maior ratione circumferentiæ circuli, ad DC. Quod nimis implicat. Non ergo circulus, eſt ad triangulum in maiori ratione quam ſit ea compoſita.

Sed nec in minori. Quia ſi aliquid circulo maius, eſſet ad triangulum in eadem ratione cum ea compoſita. Sit rurſum hoc ſpatium F. Et circulo circumſcribatur, more ſolito, figura ex æqualibus lateribus conſtans numero paribus, minori ſpatio excedens circulum quam ipſum excedat F. Sit hæc quadratum NO. Ergo NO, erit ad triangulum in minori adhuc ratione, quam ſit ea compoſita. Ergo ratio compoſita ex GA, ad CE, & ex perimetro quadrati NO, ad DC, minor erit compoſita ex AG, ad CE, & ex circumferentia, ad DC; nempe ratio perimetri quadrati NO, ad DC, minor



minor erit ratione circumferentiæ circuli, ad eandem DC. Quod etiam implicat. Cum ergo non aliquid maius, nec aliquid minus circulo, ſit ad triangulum in ea ratione compoſita. Ergo circulus eſt ad triangulum, vt eſt ea ratio compoſita. Quod &c.

SCHOLIVM.

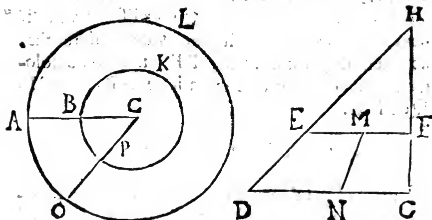
Sub hac propoſitione vniuerſali continetur tamquam particulariſſima, illa, quam oſtendit Archimedes lib. de dimenſ: circul. propoſit. 1. Nimirum circulum æquari triangulo rectangulo, cuius vnum laterum circa rectum, ſit æquale radio, aliud circumferentiæ circuli. Sed inſuper ſub hac continentur duæ hac vniuerſaliores. Prima eſt. Quod ſi vnum latus ſit æquale radio circuli: circulus erit ad

triangulum, vt circumferentia ad aliud latus circa rectum. Secunda est. Quod si circumferentia sit æqualis vni laterum circa rectum, circulus erit ad triangulum, vt radius ad aliud latus. Notetur etiam quod quamuis comparatus sit circulus cum triangulo rectangulo, licebat etiam illum comparare cum triangulo quocumque, adhibendo vice laterum circa rectum, basim, & altitudinem trianguli, vt consideranti patebit. Insuper notetur, quidquid dictum est de toto circulo respectu trianguli, posse etiam eodem modo probari de quolibet eius sectore, respectu eiusdem trianguli.

PROPOSITIO VII.

Armilla circularis, ad trapezium ordinarium rectangulum, cuius duo opposita latera sint parallela, habet rationem compositam ex ratione circumferentiæ maioris, vel minoris, armillæ, ad latus maius, vel minus parallelorum trapezij, & ex ratione latitudinis armillæ, ad altitudinem trapezij. Dummodo latitudo armillæ, & altitudo trapezij sint partes proportionales, illa semidiametri totius circuli, hæc vero altitudinis trianguli, cuius est trapezium.

ESto Armilla circularis, cuius latitudo AB, & triangulum rectangulum DHG, à quo intelligatur ablatum trapezium DF, cuius latera EF, DG, sint parallela, & FG, sit proportionalis



nális AB, hoc eſt, eadem ſit ratio CA, ad AB, quam HG, ad GF. Dico rationem armillæ, ad trapezium, componi ex ratione vel circumferentiæ ALO, ad DG, vel circumferentiæ BkP, ad EF, & ex ratione AB, ad GF. Quoniam enim, ex hypotheſi, eſt GH, ad HF, vt AC, ad CB; & vt GH, ad HF, ſic DG, ad EF; & pariter vt AC, ad CB, ſic circumferentia ALO, ad circumferentiam BKP; ergo facile concludemus permutando, eſſe vt AC, ad GH, ſic tam BC, ad HF, quam AB, ad GF, quam circumferentia ALO, ad DG, & quam circumferentia BKP, ad EF. Cum ergo rationes tam circuli, cuius ſemidiameter AC, ad triangulum DHG, quam circuli, cuius ſemidiameter BC, ad triangulum EHF, componantur ex iiſdem rationibus, nempe circumferentiarum ALO, BKP, ad DG, & EF; & AC,

vel

vel BC, ad GH, vel HF. Ergo etiam ratio armillæ ad trapezium, componetur ex ijſdem rationibus; nempe ex ratione alterutrius circumferentiæ, ad alteram ipſarum DG, EF; nempe homologæ ad homologam, & ex ratione AB, ad GF. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Etiam ergo ſub hac propoſitione vniuerſali continetur ceù particulariſſima hæc. Nimirum, quod ſi circumferentia ALO, æquetur DG, & AB, æquetur GF, etiam armillam æquari trapezio. Sed etiam aliæ duæ hac vniuerſaliores continentur. Prima eſt, quod ſi AB, GF, ſint æquales, armilla erit ad trapezium, vt circumferentia ALO, ad DG; ſi vero circumferentia ALO, ſit æqualis DG, armilla erit ad trapezium vt AB, ad GF.

SCHOLIVM II.

Facile etiam ex dictis patebit, quod ſi ductis NM, CPO, & NG, MF, ſint proportionales circumferentijs AO, BP, ſectorum ACO, BCP; ratio portionis armillæ ABPO, ad trapezium NF, componetur ex proportione circumferentiarum AO, ſeù BP, ad homologam ipſarum NG, MF, & ex ratione AB, ad FG. Imo deducentur ea omnia, quæ ſupra deducta ſunt. Nimirum
ſi

si AO, & AB, sint æquales NG, GF, portionem armillæ ABPO, æquari NF, &c. Deducetur etiam faciliter, eandem esse rationem vel armillæ, vel totius circuli, ad portionem ABPO, armillæ, cum ratione vel trapezij DF, vel trianguli DHG, ad trapezium NF, & sic de alijs partibus homologis circuli, & trianguli. Hæc enim omnia sunt nimis obuia, vt circa ipsa tempus conteramus, quamuis necessaria pro imposterum dicendis.

SCHOLIVM III.

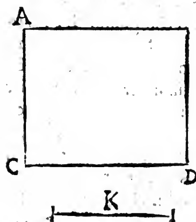
Ex dictis etiam facile patebit, quod si supponamus AC, duplam CB, & æqualem HG; & DG, æqualem esse circumferentiæ BkP; rectangulum duplum trianguli DHG, æquale erit circulo, cuius semidiameter AC. Nam cum triangulum DHG, sit duplum circuli BC, quia HG, æqualis diametro circuli, & DG, eius circumferentiæ; & cum circulus AC, sit quadruplus circuli BC; ergo talis circulus AC, erit duplus trianguli DHC; & consequenter æquale rectangulo duplo trianguli DHG. Rectangulum ergo, cuius vnum latus æquatur diametro, & aliud circumferentiæ circuli, æquatur circulo, cuius semidiameter æquetur diametro prioris circuli.

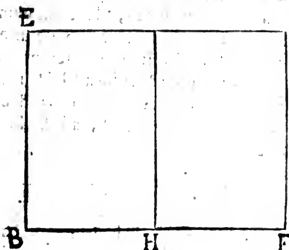
PRO-

PROPOSITIO VIII.

Cuiuscumque cylindri recti superficies, exceptis basibus, ad rectangulum quodcumque, habet rationem compositam ex ratione lateris cylindri, ad vnum latus rectanguli, & ex ratione circumferentiæ basis cylindri, ad aliud latus.

ESto cylindrus rectus, cuius rectangulum per axim AD, datumque sit aliud rectangulum quodcumque EH. Dico superficiem cylindri AD, basibus exceptis, ad rectangulum EH, habere rationem compositam ex ratione lateris AC, ad EB, & ex ratione circumferentiæ, cuius diameter CD, ad BH. Inter AC, CD, sit media proportionalis k, & exponatur rectangulum EF, cuius latus BF, æquetur circumferentiæ circuli, cuius diameter EB. Ex Archime. lib 1. de sphær. & cylin. proposit. 13. superficies cylindri AD, est æqualis circulo, cuius radius K. At talis circulus, est ad circulum, cuius radius EB, vt quadratum k, ad quadratum EB. Ergo etiam superficies cylindri AD, est ad circulum, cuius radius EB, vt quadratum k, seù vt rectangulum AD, ei æquale, ad quadratum EB. At ratio rectanguli AD, ad quadratum EB, componitur ex rationibus AC, & CD, ad EB; & vt CD, ad EB, sic circumferentia, cuius diameter CD, ad circumferentiam,





tiam, cuius diameter EB. Ergo etiam ratio superficiei cylindri AD, ad circulum, cuius radius EB, componetur ex rationibus AC, ad EB, & circumferentiæ circuli, cuius diameter CD, ad circumferentiam circuli, cuius diameter EB. Verum

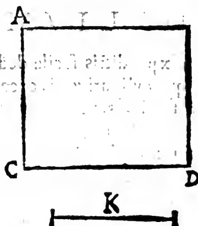
S circu-

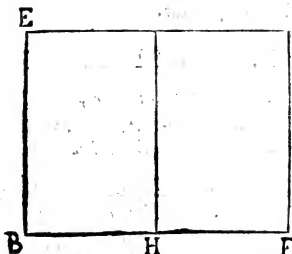
circulo, cuius radius EB, ex ſcholio 3. propoſit. ant. eſt æquale rectangulum EF. Ergo ratio ſuperficiei cylindri AD, ad rectangulum EF, componetur ex rationibus AC, ad EB, & circumferentiæ, cuius diameter CD, ad circumferentiam circuli, cuius diameter EB, nempe ex ratione circumferentiæ, cuius diameter CD, ad BF, quia ex constructione BF, ſupponitur æqualis circumferentiæ, cuius diameter EB. Rurſum rectangulum EF, eſt ad rectangulum EH, vt FB, ad BH. Quare cum ratio ſuperficiei cylindri AD, ad rectangulum EH, de foris ſumpto rectangulo EF, componatur ex ratione ipſius, ad rectangulum EF, & huius ad rectangulum EH; componetur quoque ex rationibus AC, ad EB; circumferentiæ, cuius diameter CD, ad BF; & huius ad BH; nempe ex ſolis duabus rationibus AC, ad EB; & circumferentiæ, cuius diameter CD, ad BH. Quare &c. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Ex dictis nullo negotio deducitur, quod ſi AC, ſit æqualis EB, ſuperficies cylindri AD, baſibus exceptis, erit ad rectangulum EH, vt circumferentia, cuius diameter CD, ad BH. Si vero prædicta circumferentia ſit æqualis BH, etiam ſuperficies prædicta, erit ad EH, vt latus AC, ad EB. At ſi latus AC, ſit æquale EB, & circumferentia

præ-





prædicta sit æqualis BH, etiam superficies cylindrica æquabitur rectangulo EH. Vnde deducitur quod superficies cuiuscumque cylindri recti, basibus exceptis, est ęqualis rectangulo, cuius vnum latus ęquatur lateri cylindri, aliud circumferentiæ basis ipsius.

SCHOLIVM II.

Poſſet etiam ex prædictis facile deduci, ſuperficiem cuiuſcumque cylindri recti, exceptis baſibus, eſſe ad circulum ſuæ baſis, vt latus cylindri, ad quartam partem diametri baſis. Ex quibus poſtea deduceretur quod ſi latus cylindri, & diameter baſis æquarentur, ſuperficiem cylindricam eſſe quadruplam ſuæ baſis; & conſequenter ſuperficiem cylindricam quadruplam eſſe circuli maximi ſphæræ ſibi inſcriptæ. Sed quia hæc non pertinent ad rem, ideo ex induſtria relinquuntur.

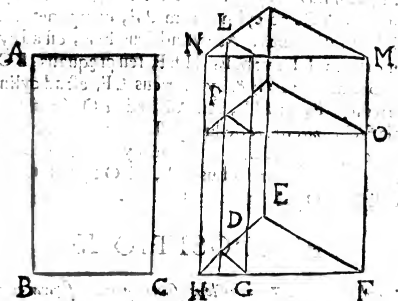
PROPOSITIO IX.

Cylindrici quicumque habent inter ſe rationem compoſitam ex ratione baſium, & altitudinum, ſeù laterum æqualiter ſuper baſibus inclinatorum.

CYlindricum vocamus cum Caualerio lib. 1. Geome. Indiuiſ. def. 3. omne corpus columnare, quæcumque figuræ ſint eius oppoſitæ baſes. Quod ſi oppoſitæ baſes ſint circuli, vocabimus illum, conſueto modo, cylindrum.

Sint quilibet cylindrici ABC, PF, quorum baſes BC, DEFG, altitudines, ſeù latera æqualiter inclinata, AB, OF. Dico rationem cylindrici ABC, ad cylindricum PF, componi ex ratione

AB,



AB, ad OF, & ex ratione basis BC, ad basim DEFG. Si DEFG, non est æqualis basi BC, concipiamus illum augeri, minuiue vt fiat æqualis BC, & sit hæc HEF; & super illa concipiamus cylindricum eiusdem inclinationis cum PF, qui sit NF, cuius latus MF, æquetur AB, Cylindrici AC, NF, sunt ęquales; cum enim bases, & altitudines ipsorum sint ęquales, nequeunt producere nisi solida ęqualia, vt bene ait P. Tacquet lib. 1. Cylind. & annul. parte 1. proposit. 5. & probari potęst ex 12. Elemen. Vnde cylindrici AC, NF, ad cylindricum PF, habebunt eandem rationem. Verum ratio cylindrici NF, ad cylindricum PF, componitur ex rationibus cylindrici NF, ad cylindricum

LF;

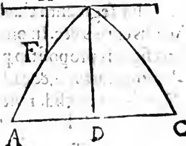
L F; & huius ad cylindricum P F. Ergo & ratio cylindrici A C, ad cylindricum P F, componetur ex ijſdem rationibus. At cylindricus N F, eſt ad cylindricum L F, vt baſis H E F, ſeù ei æqualis B C, ad baſim D E F G; & cylindricus L F, eſt ad cylindricum P F, vt M F, ſeù A B, ad F O, (quæ omnia facile patent, & deduci poſſunt ex 12. Element.) Ergo ratio cylindrici A C, ad cylindricum P F, componetur ex rationibus A B, ad O F, & B C, ad D E F G. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO X.

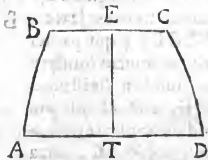
Si cylindricus rectus exiſtens ſuper qualibet figura circa axim, ſecetur diagonaliter plano tranſeunte per puncta extrema oppoſita axium planorum oppoſitorum, adeo vt communes ſectiones plani ſecantis, & oppoſitarum baſium ſint perpendiculares oppoſitis axibus. Quilibet truncus huius cylindrici, erit ad ſolidum rotundum ortum ex eius baſi rotata circa communem ſectionem figuræ, & plani ſecantis, vt latus cylindrici, ad circumferentiam circuli, cuius ſemidiameter axis figuræ.

Figura circa axim, vel habet baſim, vt A B C, in prima figura, cuius axis B D, baſis A C. Vel non habet baſim, vt A F B, in ſecunda, cuius axis A B. Vel tandem habet duas baſes oppoſitas, & parallelas, vt A B C D, in tertia, cuius axis E T, baſes vero B C, A D. Primi generis poſſunt eſſe, vel quod-

quodlibet ex infinitis trilineis duplicatum; vel quodlibet his simile; vel quælibet figura, cuius perimeter claudatur à linea recta A C, & à curua A B C; seù à curuis AB, BC; cuius possunt esse species innumeræ. Secundi generis possunt esse vel figuræ, quæ clauduntur à linea curua, vt sunt circuli, & ellipses; vel à duabus lineis curuis, vt sunt duæ similes, & æquales portiones circulorum, ellipsium; duæ Parabolæ, Hyperbolæ, cycloides, harum portiones, &c. Quarum communis basis A B, consideratur vt axis. Tandem tertij generis possunt esse rectangulum; quodlibet ex infinitis duplica-

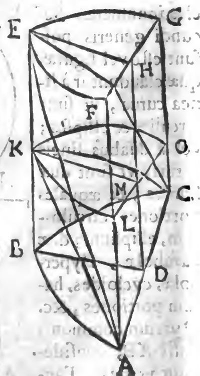






plicatis trapezijs, vel quodlibet his simile; & alia innumerabilia segmenta clausa à duabus lineis rectis, & à duabus curuis &c. In omnibus istis propemodum infinitis figuris propositio proposita verificatur eadem demonstratione, & eadem cõstructione, vel parum diuersa, vt consideranti patebit, adeo vt propositio sit vniuersalissima. Quamuis nos confusionis euitandæ gratia simus adhibituri figuram basim vnicam habentem.

Esto ergo figura ABC, cuius axis BD, basis AC; super qua intelligatur cylindricus rectus, cuius plana opposita ABC, FEG, qui sectus plano transeunte per AC, & per punctum E, diuidetur in duo segmenta, seu in duos truncos; nempe AECGF (qui deinceps facilitatis gratia appellabitur truncus dexter) & ABCE, (qui pariter vocabitur truncus sinister). Dico truncum sinistrum ABCE, esse ad solidum rotundum ortum ex rotatione figurę ABC, circa AC, vt EB, latus cylindrici, ad circumferentiam circuli, cuius radius BD. Pariter truncum dexterum

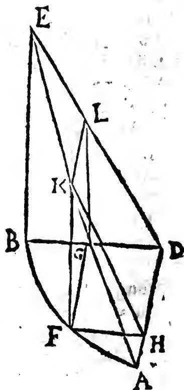


rum

rum A E C G F, esse ad solidum rotundum ortum ex rotatione figurę F G E, seù A B C, rotatę circa ductam per E, vel per B, G F, vel A C, parallelam, vt E B, ad eandem circumferentiam.

Ad euitandam confusionem, ostendemus hoc in trunco sinistro, & in solido rotundo ex figura ABC, circa A C. Nam eadem erit demonstratio in alio trunco, vt consideranti patebit. Meliusque erit si hoc ostendatur in dimidio trunco ABDE, existente super dimidia figura A B D, comparando illum cum solido orto ex rotatione A B D, circa A D. Quod enim de dimidij dicetur verificabitur etiam de duplis. Exponatur ergo prędictus truncus solitariè sumptus, & sit A B D E; ductaque D E, erit triangulum E B D, erectum ad planum A B D, & erit sectio maxima totius trunci sinistri, & imposterum vocabitur triangulum maximum omnium sibi parallelorum in trunco ducibilium. Sumatur in B D, vbi libet punctum G, & agantur G F, parallela A D, & F H, parallela B D; & à puncto F, erigatur F K, pars lateris cylindrici. Pariter per punctum G, ducatur in triangulo maximo G L, parallela E B. Patet duas F H, F K, esse parallelas duabus G D, G L; F H, G D, ex constructione; F K, G L, vero, quia ambę parallelæ E B; F K, quia latus cylindrici; G L, vero ex constructione. Ergo & plana transeuntia per H F, F k, & per D G, G L, erunt parallela. Verum cùm hæc secentur à plano A E D, & communes sectiones sint

 HK,



HK, DL. Ergo etiam hæ erunt parallelæ. Quare cum tres Hk, HF, Fk, sint parallelæ tribus DG, DL, GL. Ergo & triangula HFk, DGL, erunt similia. At latus homologum FH, est æquale lateri homologo GD, quia ex constructione FD, est parallelogrammum. Ergo Fk, erit æqualis GL. Verum cum sit vt BE, ad GL, sic BD, ad DG; & vt BD, ad DG, sic circumferentia circuli, cuius radius BD, ad circumferentiam circuli, cuius radius DG. Ergo & vt EB, ad GL, sic circumferentia circuli, cuius radius BD, ad circumferentiam circuli, cuius radius DG. Quare & permutando, vt EB, ad circumferentiam circuli, cuius radius BD, sic LG, seù ei æqualis Fk, ad circumferentiam circuli, cuius radius GD, seù FH Sed vt kF, ad circumferentiam circuli cuius radius FH, sic (ducta KI, parallela FG, vtpote iungentes æquales, & parallelas Fk, GL) parallelogrammum FL, ad superficiem cylindricam descriptam à parallelogrammo FD, reuoluto circa AD, ex scholio primo, pro-

propofit.8. huius; & puncta G, F, fumpta funt arbitrarie. Ergo & vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia. Ergo & vt EB, ad circumferentiam defcriptam à radio BD, fic omnia parallelogramma trunci ABDE, ad omnes fuperficies cylindricas plani ABD, circa AD, rotati; nempe fic truncus ABDE, ad folidum rotundum ex eadem figura fic rotata, genitum. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Vt fupra innuimus, eadem demonftratio currit in omnibus figuris, fed conftructio eft in quibufdam parum diuerfa ab affignata. Quando enim figura prima in fchemate initio propofitionis pofito, rotatur circa EBG; & in fecunda circa EAG, vel EBG, tunc FH, debet produci vfque ad lineam circa quam fit rotatio. Idem dicendum effet fi figura ABC, effet talis conditionis, vt AC, vel non effet maxima, vel non æqualis maximæ parallelarum fibi ducibilium intra figuram interceptarum, nam tunc FH, effet producenda vfque ad AC, hinc inde productam.

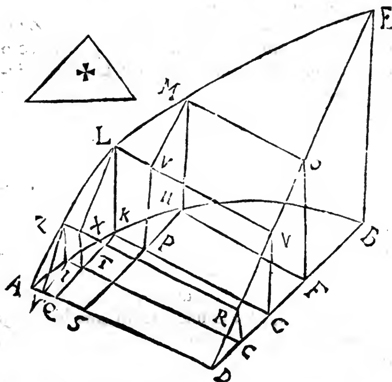
SCHOLIVM II.

Oftendimus autem præfentem propofitionem per viam regalem indiuifibilium, tumquia propofitio elegantior euadit, cum vnica propofitione,

vnicaque demonſtratione comprehendantur fere infinitæ figuræ, caſuſque innumeri; tum quia P. Tacquet opere ſupra citato lib. 1. & 2. demonſtrat eam in quibuſdam caſibus, demonſtrationibus peculiaribus modo Archimedeo; & in caſibus, in quibus eam non oſtendit, ipſe non dubitabit, nec aliquis alius poteſt rationabiliter dubitare, poſſe oſtendi eodem modo, quo ipſe ibidem oſtendit (adhibitis tamen congruenti præparatione, & argumentatione;) Vnde qui plura deſiderat, addeat ipſum Tacquet. Verum vt omnibus aliqualiter ſatisfaciamus, trademus & nos vnicam demonſtrationem modo Archimedeo; quæ cum comprehendat omnes figuras prædictas in alteram partem deficientes, & parum ei deerit vt ſit vniuerſaliſſima, & poterit lectori pro exemplo inſeruire. Demonſtratio autem conueniens cum ipſis Tacquet, ſit ſequens.

ALITER.

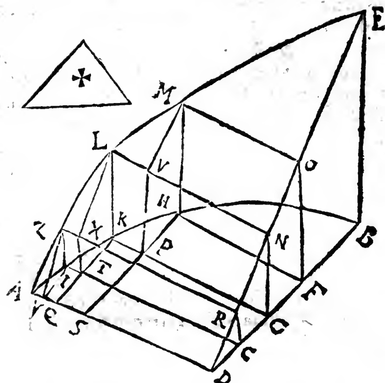
BD, diameter diuidatur in quotcumque partes BF, FG, GC, CD, & per puncta F, G, C, &c. ducantur FH, GK, CI, &c. AD, parallelæ; & à punctis H, k, I, erigantur HM, kL, IZ, latera cylindrici; & per puncta F, G, C, ducantur in triangulo maximo EDB, FO, GN, CR, parallelæ EB. Eodem modo, quo patuit ſupra, patebit FO, MH; GN, kL; CR, IZ, æquales eſſe, ac parallelas; ac proinde, ſi ducantur MO, LN, ZR, patebit



tebit MF, LG, ZC, esse parallelogramma. Pariter à punctis H, k, I, ducantur HPS, kQ, IY, parallelæ DB; ac in plano LG, ducatur PV, parallela GN, vel Lk; & pariter in plano ZC, ducatur TX, parallela CR. Ergo in trunco habemus inscripta prismata ZD, LC, MG; quorum ZD, habet plana opposita triangula ZQI, DRC; reliqua vero habent plana opposita, quæ sunt trapezia, vt patet in schemate. Quod vero de istis dicitur, intelligendum veniret etiam de alijs, quæ inscriberentur, si BD, diuisa fuisset in plura, pluraque puncta, & per

puncta

puncta diuisionum constructa essent prismata, vt factum est in prædictis: semper enim prismatis Z D, essent plana opposita triangula; reliquorum vero trapezia. Intelligamus figuram A B D, cum sibi inscriptis parallelogrammis HG, kC, & ID, rotari circa A D. A parallelogrammo ergo I D, constituetur cylindrus; à parallelogrammis vero kC, HG, tubi cylindrici, quorum crassities erunt KT, PH. Facile probabitur, vt factum est supra, esse vt E B, ad circumferentiam circuli, cuius radius B D, sic F O, seù M H, ad circumferentiam, cuius radius F D, seù H S: & pariter sic G N, seù L k, ad circumferentiam, cuius radius G D, seù k Q: necnon sic C R, seù I Z, ad circumferentiam, cuius radius C D, seù I Y. Tunc. Quoniam habemus duos cylindricos, nempe prisma Z D, & cylindrum ex I D, circa A D, quorum est eadem altitudo I C. Ergo prisma, erit ad cylindrum, vt basis ad basim, ex proposit. 9. huius; nempe vt triangulum R C D, ad circulum, cuius radius D C. At triangulum, est ad circulum, ex scholio proposit. 6. huius, vt R C, ad circumferentiam, cuius radius D C; nempe sic E B, ad circumferentiam, cuius radius B D. Quare & prisma, erit ad cylindrum; vt E B, ad circumferentiam, cuius radius B D. Pariter quoniam habemus duos cylindricos, nempe prisma L C, & tubus ex k C, circa A D, quorum eadem altitudo G k. Ergo, ex dictis, prisma erit ad tubum, vt basis ad basim; nempe vt trapezium C R N G, ad armillam

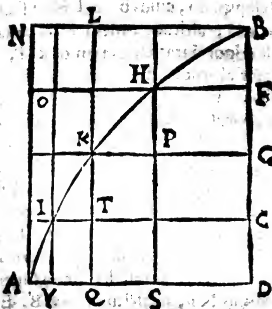


armillam ex GC, reuoluta circa AD; nempe ex ſcholio 1. propoſit. 7. huius, vt NG, ad circumferentiam, cuius radius GD; hoc eſt, vt EB, ad circumferentiam, cuius radius DB. Idem oſtendetur de priſmate MG, & de tubo ex HG, circa AD. Quare vt EB; ad circumferentiam circuli, cuius radius BD, ſic omnia priſmata inſcripta in trunco DABE, ad cylindrum cum reliquis tubis cylindricis inſcriptis in ſolido rotundo ex figura ABD, circa AD.

Quod vero probatum eſt de priſmatibus inſcriptis

ptis in trunco, & de cylindro, & tubis inscriptis in solido rotundo, probaretur etiam de prismatibus, & de cylindro, & tubis circumscriptis trunco, & solido rotundo. Hoc est si prisma ZD, intelligeretur produci, vt eius altitudo esset AD; tunc prisma esset circumscriptum trunco; & pariter si cylindrus ex BD, intelligeretur produci, vt eius altitudo esset eadem DA, cylindrus esset tunc circumscriptus solido rotundo. Eodemq; modo, quo supra factum est, probaremus, prisma esse ad cylindrum, vt EB, ad circumferentiam circuli, cuius radius BD. Idem probaretur si prisma LC, cum tubo ex kC, intelligerentur produci, vt eorum communis altitudo esset CI, & idem de alijs. Vnde eodem modo ostenderetur omnia prismata trunco circumscripta, esse ad cylindrum, & ad tubos circumscriptos solido rotundo, vt EB, ad circumferentiam, cuius radius BD.

Sed insuper dico, quod erit vt EB, ad sæpe dictam circumferentiam, sic truncus, ad illud solidum rotundum. Nam si non est, vel truncus erit in maiori, vel in minori ratione ad illud solidum rotundum, quam EB, ad illam circumferentiám. Si dicatur esse in maiori. Ergo aliquid trunco minus, erit ad solidum rotundum in eadem ratione cum EB, ad illam circumferentiam. Sit excessus, quo truncus hoc excedit, penes ✠, magnitudinem; & facilitatis gratia, exposita basi ABD, seorsim, ipsi circumscribatur ND, parallelogrammum, & bD, secetur



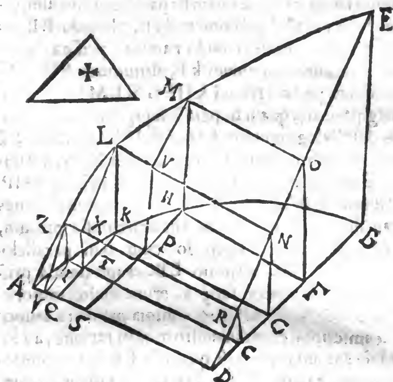
secetur bifariam in G, & rursum partes eius bifariam in F, C, & sic semper donec tandem deueniamus ad talem partem B F, vt factis parallelogrammis NF, & reliquis, æqualibus, parallelogrammum N F, sit talis conditionis, vt super eo intellecto parallelepipedo recto, in altitudine E B, hoc sit minus magnitudine ✱. Ergo si à trunco A D B E, intelligamus ablatum illud parallelepipedum, adhuc residuum, erit ad illud solidum rotundum in maiori ratione quam E B, ad illam circumferentiam. Tunc in figura trunci ratiocinetur sic. Pars trunci F H B E M O, minor est parallelepipedo, cuius altitudo E B, basis parallelogrammum H B, in secunda figura. Pariter pars trunci P k H L M V, est mi-

 nor

nor parallelepipedo, cuius basis kH, in secunda, seù ei æquale LH, altitudo eadem EB, quia & basis kPH, est minor parallelogrammo kH, & etiam HM, maior altitudo trunci, minor est EB. Eodem modo patebit partem trunci ITkLZX, minorem esse parallelepipedo, cuius basis parallelogrammum Ik, in secunda, seù ei æquale LO: partemque trunci AYIZ, minorem esse parallelepipedo, cuius basis parallelogrammum AI seù ON, altitudo eadem EB. Et idem eodem modo ostenderetur de cæteris partibus, si adessent. Ergo excessus trunci super omnia prismata prædicta in trunco inscripta, minor erit parallelepipedo super basi parallelogrammo NF, in altitudine EB. Ergo multo minor magnitudine ✳. Ergo omnia prismata in trunco inscripta, erunt ad solidum rotundum ex basi circa AD, adhuc in maiori ratione quam EB, ad circumferentiam ex radio BD. Sed supra probatum est vt EB, ad illam circumferentiam, sic esse omnia prismata in trunco inscripta, ad cylindrum, & tubos cylindricos inscriptos in solido rotundo ex basi. Ergo omnia prismata in trunco inscripta, habebunt ad solidum rotundum prædictum maiorem rationem quam ad cylindrum, & tubos cylindricos in ipso solido rotundo inscriptos. Quod vtique implicat. Ergo truncus ad solidum rotundum non erit in maiori ratione, quam EB, ad illam circumferentiam.

Sed nec in minori. Nam aliquid trunco maius,

erit



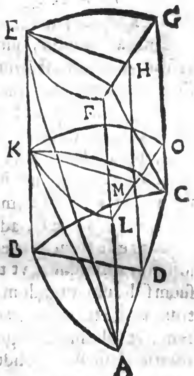
erit ad solidum rotundum in eadem ratione cum EB, ad illam circumferentiam. Sit excessus, quo talis magnitudo superat truncum, corpus ✱: & facta superiori constructione, parallelepipedum super NF, in altitudine EB, sit minus corpore ✱. Ergo truncus cum tali parallelepipedo, erit ad solidum rotundum adhuc in minori ratione EB, ad illam circumferentiam. Tunc discuratur sic. Prisma, cuius basis esset parallelogrammum HB, altitudines vero BE, FO, quod esset vnum ex prismatibus trunco circumscriptis, excedit partem trunci HFBEMO,

minori magnitudine quam sit parallelepipedum, cuius basis parallelogrammum H B, altitudo E B, vt clare patet. Eodem modo patebit, prisma, cuius basis parallelogrammum k F, altitudines FO, GN, excedere partem trunci k H F G N L M O, minori magnitudine, quam sit parallelepipedum, cuius basis parallelogrammum k H, seù H L, altitudo E B (ipsum enim excedit prismate, cuius basis excessus parallelogrammi K H, supra portionem basis K H P, altitudines FO, GN): & eodem modo patebit omnes excessus simul prismatum trũco circumscriptorum, minores esse parallelepipedo, cuius basis parallelogrammum N F, altitudo E B. Ergo omnia prismata trunco circumscripta, erunt multo minora trunco, & [illegible] simul. Ergo omnia prismata trunco circumscripta, erunt in multo minori ratione, ad solidum rotundum ex basi, quam sit E B, ad circumferentiam ex radio B D. Sed vt E B, ad illam circumferentiam, sic omnia prismata trunco circumscripta, ad cylindrum, & tubos cylindricos solido rotundo circumscriptos. Ergo omnia prismata trunco circumscripta, erunt ad solidum rotundum ex basi in minori ratione quam ad cylindrum, & tubos cylindricos solido rotundo circumscriptos. Quod rursum implicat. Cum ergo truncus non sit ad illud solidum rotundum ex basi nec in maiori, nec in minori ratione, E B, ad illam circumferentiam. Ergo in æquali. Quod &c.

SCHO-

SCHOLIVM III.

Ex præsenti propositione sic vniuersaliter proposita, ex hacque vniuersalissima doctrina emanant quamplures veritates, quarum aliquæ sunt diligenter adnotandæ, quia plurimum inseruiunt inferius dicendis.



Emanat ergo primo, quod si cylindricus super ABC, sit sectus primo vt dictum est; postea sumpto in BE, vbilibet puncto K, intelligamus aliud planum transire per AC, & per ipsum, adeo vt constituantur (ducto plano KLO, ipsi ABC, parallelo) alij trunci, vt in schemate præsenti; truncus ABCE, sinister, erit ad truncum ABCk, sinistrum, vt EB, ad BK. Idem intelligendum est etiam de truncis dexteris ad inuicem. Ratio est, quia quilibet horum similium truncorum, est ad solidum idem rotundum genitum ex eadem figura eodem modo reuoluta, vt sua altitudo, ad eandem circumferentiam. Vnde cum sit V. g.

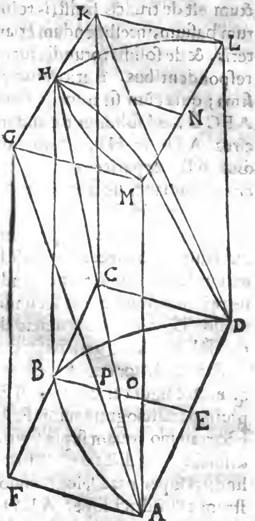
EB,

EB, ad circumferentiam, cuius radius BD, vt truncus ABCE, ad solidum rotundum ex basi; & cum sit conuertendo, vt solidum rotundum ex basi, ad truncum ABCk, sic talis circumferentia, ad Bk. Ex æquali patebit propositum.

Emanat secundo, quod si cylindrici prædicti secentur vt dictum est, trunci dexteri, ad truncos sinistros erunt in eadem ratione. Ratio est, quia cum truncus dexter maior, sit ad solidum rotundum ex figura CBA, circa ipsam tangentem in B, seu ipsi AC, parallelam, vt HD, seu EB, ad circumferentiam, cuius radius BD; & pariter truncus sinister maior sit ad solidum rotundum ex eadem figura circa AC, vt EB, ad eandem circumferentiam: sequitur esse truncum dexterum maiorem, ad suum solidum rotundum, vt truncus sinister maior, ad suum solidum rotundum. Quare permutando, erit truncus dexter maior, ad truncum sinistrum maiorem, vt solidum ex figura CBA, cuius centrum rotationis sit B, ad solidum rotundum ex eadem figura, cuius centrum rotationis sit D. Eodem modo probabitur esse vt solidum ex figura ABC, cuius centrum rotationis B, ad solidum ex eadem figura, cuius centrum rotationis sit D, sic truncum dexterum minorem, ad truncum sinistrum minorem. Quare erit truncus dexter maior, ad truncum sinistrum maiorem, vt truncus dexter minor, ad truncum sinistrum minorem.

Emanat tertio id quod sequentibus quamplurimum

mum inseruit, & ideo diligenter memoriæ est comendandum; & est, quod si circa eundem axim B E, intelligantur duę quęcumque figuræ A B D, A F C D, quarum vel sit eadem basis A D, vel vna sit maior alia, dummodo axis B E, sit eadem; super quibus intelligamus cylindricos rectos æquealtos, sectos diagonaliter plano transeunte per A D, & per G H K, vt dictum est, & vt apparet in schemate; erit vt truncus sinister vnius, ad solidum rotundum suæ basis circa A D, sic truncus sinister alterius, ad solidum rotundum suæ basis circa eandem A D. Vnde & permutando, erit vt truncus sinister ad truncum sinistrum, sic solidum rotundum ad solidum rotundum. Quod autem di-



ctum est de truncis sinistris respectu solidorum suarum basium, intelligendum etiam est de truncis dexteris, & de solidis rotundis suarum basium ipsis correspondentibus. Ratio huius asserti est manifestissima; quia cum sit truncus sinister cylindrici super AFCD, ad solidum rotundum ex eadem figura circa AD, vt HB, ad circumferentiam, cuius radius BE; & pariter cum sit vt HB, ad talem circumferentiam, sic truncus sinister cylindrici super ABD, ad solidum ex ABD, circa AD: Erit & vt primus truncus, ad primum solidum, sic secundus truncus, ad secundum solidum. Quare & permutando, vt primus truncus, ad secundum truncum, sic primum solidum, ad secundum solidum. Eodem modo discurreretur in truncis dexteris respectu suorum solidorum. Quare patet propositum.

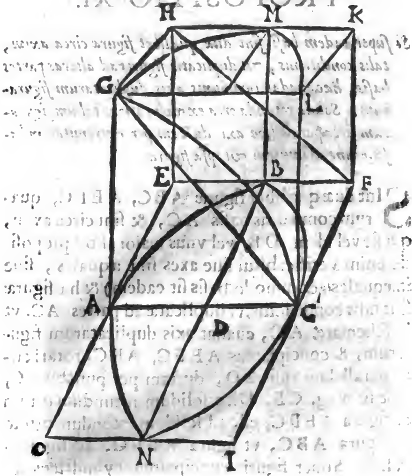
Particulariter ergo habemus, quod si ABD, sit quælibet figura circa axim BE, cui sit circumscriptum parallelogrammum FD, & tam super parallelogrammo, quam supra figura concipiantur cylindrici secti, vt dictum est. Erit prisma dimidium cylindrici super parallelogrammo, ad truncum sinistrum cylindrici super ABD, vt cylindrus ex parallelogrammo circa AD, ad solidum rotundum ex eadem figura ABD, circa eandem AD. Eodem modo erit prisma dimidium cylindrici super parallelogrammo, ad truncum dexterum cylindrici super ABD, vt cylindrus ex FD, circa FC, ad solidum rotundum ex ABD, circa eandem FC.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Si super eadem basi sint duæ qualibet figuræ circa axim, talis conditionis, vt duplicatis figuris ad alteras partes basis, hæc euadat communis axis duplicatarum figurarum. Solida rotunda orta ex volutatione talium figurarum circa parallelam axi ductam per extremitatem basis, erunt ad inuicem vt ipsæ figuræ.

SInt duæ quælibet figuræ ABC, AEFC, quarum communis basis AC, & sint circa axim, qui sit vel idem DB, vel vnus maior alio (propositio enim verificabitur siue axes sint æquales, siue inæquales, dummodo basis sit eadem) & hæ figuræ sint talis conditionis, vt duplicatæ ad partes AC, vt in schemate, AC, euadat axis duplicatarum figurarum; & concipiamus AEFC, ABC, rotari circa parallelam ipsi BD, ductam per punctum C, quæ sit V. g. CF. Dico solidum rotundum ortum ex figura AEFC, esse ad solidum rotundum ortum ex figura ABC, vt figura AEFC, ad figuram ABC. Super figuris concipiamus cylindricos rectos æquealtos HC, & ABCLMG, sectos diagonaliter plano transeunte per CF, & per HG, diuidente ambos in duos truncos, vt in schemate, & vt sæpe dictum est. Ergo quilibet illorum diuidetur in truncos æquales, vt clare patet. Cum ergo cylindrici prædicti, quia æquealti, sint vt bases; ergo



& illorum dimidij erunt vt bases. Sed vt truncus sinister CAEFHG, cylindrici super AF, ad truncum sinistrum CBAG, cylindrici super figura, sic ex scholio 3. proposit. anteced. solidum ex figura AF, circa FC, ad solidum ex figura ABC, circa

circa FC. Ergo & vt solidum, ad solidum, sic figura ad figuram. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

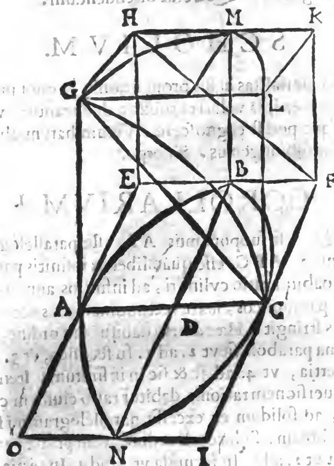
Vniuersalitas huius propositionis, & quot propositiones ex ipsa veluti corollaria deducantur, vnusquisque potest cognoscere. Verum harum aliquas & nos subiungemus. Sit ergo.

COROLLARIVM I.

Quod si supponamus AF, esse parallelogrammum, & ABC, esse quamlibet ex infinitis parabolis; dabitur ratio cylindri, ad infinitos annulos strictos parabolicos, iuxta rectitudinem axis acceptos, quos stringit. Hæc autem dabitur tali ordine, vt in prima parabola sit vt 2. ad 1. In secunda, vt 3. ad 2. In tertia, vt 4. ad 3. & sic in infinitum. Item per conuersionem rationis dabitur ratio eiusdem cylindri, ad solidum ex excessu parallelogrammi supra parabolam. Et hæc tali ordine, vt in prima parabola sit vt 2. ad 1. In secunda vt 3. ad 1. In tertia vt 4. ad 1. & sic in infinitum. Rationes petantur ex prima proposit. lib. primi.

COROLLARIVM II.

Infertur secundo. Quod si BAN, sit figura



constans ex duabus quibuscumque semiparabolis eiusdem gradus, & æqualibus sic dispositis, vt basis A D, sit axis ambarum simul sumptarum. Dabitur ratio cylindri ex parallelogrammo E N, ipsis circumscripto reuoluto circa O N, ad solidum ortum ex fi-

ex figura BAN, circa eandem ON. Hæc autem dabitur tali ordine, vt in prima parabola sit vt 2. ad 1. In secunda vt 3. ad 2. &c. Imo per conuersionem rationis, dabitur etiam ratio prædicti cylindri, ad solidum ex excessu parallelogrammi supra figuram, constantem ex semiparabolis sic dispositis, & ordine, vt in antecedenti scholio. Ratio est, quia parallelogrammum EN, ad figuram BAN, retinet eandem rationem, quam habet parallelogrammum AF, ad ABC. Tam enim parallelogramma EN, AF, quam figuræ ABC, BAN, sunt æquales inter se.

COROLLARIVM III.

Infertur tertio; quod in præcedenti casu, quam rationem habet cylindrus ex EC, circa FC, ad solidum ex ABC, circa FC, eandem habeat cylindrus ex EN, circa ON, ad solidum ex BAN, circa ON: & quam habet cylindrus ex EC, circa FC, ad solidum ex AEBFC, circa FC, eandem habeat cylindrus ex EN, circa ON, ad solidum ex figura BEAON, circa ON. Ratio est, quia vtraque ratio horum cylindrorum ad prædicta solida, est eadem cum vtraque ratione parallelogrammorum ad figuras; quæ rationes, propter æqualitatem parallelogrammorum, & figurarum, æquales sunt. Ex quibus postea consequenter deducitur, quod solidum ex parabola ABC, circa CF, erit

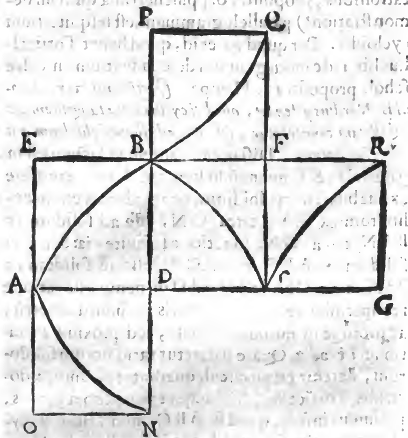
erit ad solidum ex BAN, circa ON, vt AD, ad BD. Et pariter ratio solidi ex figura AEBFC, circa FC, ad solidum ex figura BEAON, circa ON, erit vt AD, ad DB. Ratio est, quia cum sit vt cylindrus ex EC, circa FC, ad solidum ex ABC, circa FC, sic cylindrus ex EN, circa ON, ad solidum ex BAN, circa ON; erit etiam permutando, vt cylindrus ad cylindrum, sic solidum ad solidum. Sed cylindrus ad cylindrum, est vt AD, ad DB (Nam ratio cylindri ad cylindrum, componitur ex ratione basis ad basim; nempe ex ratione quadrati AC, ad quadratum BN; nempe ex ratione quadrati AD, ad quadratum DB; nempe ex duplici ratione AD, ad DB, & ex ratione altitudinum; nempe ex ratione DB, ad DA: at duæ rationes AD, ad DB, cum ratione DB, ad DA, faciunt solam rationem AD, ad DB.) Quare, & vt, AD, ad DB, sic solidum ex ABC, ad solidum ex BAN. Eodem modo argumentabitur in solidis ex figuris AEBFC, BEAON, reuolutis, vt dictum est.

COROLLARIVM IV.

Infertur quarto, quod si ABC, sit cylois primaria, cylindrus ex EC, circa FC, erit ad solidum ex ABC, circa FC, in ratione sesquitertia. Ratio est, quia ex Torricellio de dimensione cycloidis, & ex Tacquet in dessertatione de circulorum volutatio-

tationibus, proposit. 20. (pulcherrima quidem demonstratione) parallelogrammum, est sesquitertium cycloidis. Per quod patet id, quod habet Torricellius lib. 1. de motu grauium descendentium in calce schol. proposit. 18. Nempe. *Clarissimus vir Antonius Nardius ostendit, quod si cyclois circa tangentem axi parallelam conuertatur, solidum ad suum cylindrum erit subsesquitertium.* Discurendo autem vt factum est in parabola, & supponendo figuram BAN, constare ex duabus semicycloidibus, concludemus etiam cylindrum ex EN, circa ON, esse ad solidum ex BAN, circa ON, in ratione sesquitertia: & etiam solidum ex ABC, circa CF, esse ad solidum ex BAN, circa ON, vt AD, ad DB; nempe in ratione semiperipheriæ circuli genitoris ad suum diametrũ; ac proinde in ratione non data, sed proxime in ratione 11. ad 7. Quare si daretur ratio horum solidorum, daretur etiam circuli quadratura. Imo ex doctrinis Torricellij, & Tacquet locis supra citatis, possumus infere, quod si ABC, non solum sit cyclois primaria, sed quælibet ex infinitis cycloidibus, cylindrum ex parallelogrammo EC, circa CF, ad solidum ex cycloide ABC, circa FC; vel cylindrum ex parallelogrammo EN, circa ON, ad solidum ex figura BAN, circa ON, esse vt quadrupla AC, ad duplam AC, cum peripheria circuli genitoris. Sed pro is inferendis, & alij, videantur supradicti auctores locis citatis.

CO-



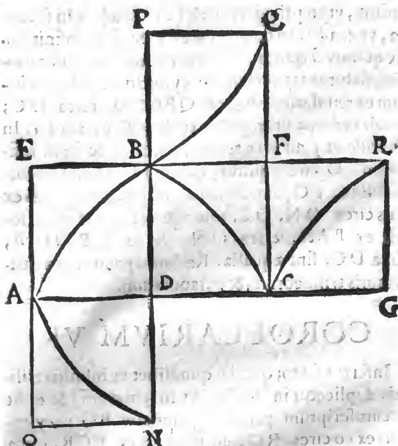
COROLLARIVM V.

Infertur quinto. Quod si quodlibet ex infinitis trilineis BCF, duplicetur vt fiat CBQ, & ei sit circumscriptum parallelogrammum CP. Dabitur ratio cylindri ex parallelogrammo CP, circa DC, ad solidum ex duplici trilineo, hoc est ex trilineo CBQ,

CBQ, circa eandem DC. Hæcque dabitur tali ordine, vt in primo trilineo sit vt 2. ad 1. In secundo, vt 3. ad 1. In tertio vt 4 ad 1. & sic in infinitum. Ex quibus sequitur, quod per conuersionem rationis, dabitur ratio eiusdem cylindri ad solidum ortum ex reuolutione figuræ QPBCD, circa DC; & tali ordine; vt in primo trilineo sit vt 2. ad 1. In secundo vt 3. ad 2. In tertio vt 4. ad 3. & sic in infinitum. Quare sequitur, quod cum parallelogramma EN, PC, sint æqualia, & pariter cylindri ex ipsis circa ON, DC, sint æquales, quod etiam solida ex BAN, circa ON, & ex QPBDCB, circa DC, sint æqualia. Rationes petantur ex quadraturis trilineorum, & parabolarum.

COROLLARIVM VI.

Infertur sexto; quod si quodlibet ex infinitis trilineis duplicetur in BCR, vt in schemate, & ei sit circumscriptum parallelogrammum BG; cylindrus ex eo circa RG, ad solidum ex BCR, circa RG, erit in ratione data tali ordine, vt in primo trilineo sit vt 2. ad 1. In secundo, vt 3. ad 1. In tertio, vt 4. ad 1. & sic in infinitum. Ex quibus sequitur, quod per conuersionem rationis, idem cylindrus ad solidum ortum ex figura BDCRG, circa RG, in primo trilineo erit vt 2. ad 1. In secundo vt 3. ad 2. In tertio vt 4. ad 3. & sic in infinitum. Ex quibus etiam sequitur, quod etiam solida ex ABC, circa



FC, & ex BDCGR, circa RG, ſint æqualia. Nam etiam cylindri ex parallelogrammis æqualibus, nempe EC, circa CF, & BG, circa RG, ſunt æquales. Rationes dependent ex propoſit. 1. primi libri.

CO-

COROLLARIVM VII.

Infertur septimo. Quod quæcumque dicta sunt in duobus superioribus corollarijs de trilineis infinitarum parabolarum, verificanturetiam de trilineis cycloidis primariæ, & aliarum. Nempe si cyclois ABC, disponatur quatuor modis, vt in schemate sunt dispositæ parabolæ. Sed rationes cylindrorum ad solida ex trilineis in primaria, erunt vt 4. ad 1. Ad solida vero ex figuris, vt 4. ad 3. nempe in eadem ratione sicuti ad parabolam cubicam. In alijs vero cycloidibus, ad solida ex trilineis, vt quadrupla AC, ad excessum ipsius supra duplam AC, & supra circumferentiam circuli genitoris. Ad solida vero ex figuris, vt quadrupla AC, ad duplam AC, cum circumferentia circuli genitoris.

COROLLARIVM VIII.

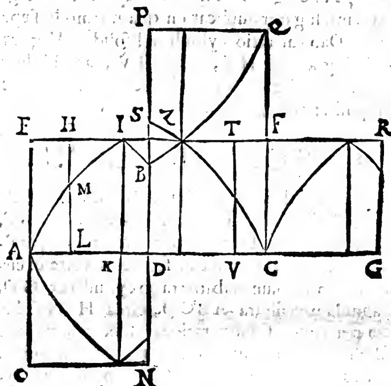
Infertur octauo; quod si ABC, non sit parabola, sed figura quædam constans ex duabus portionibus minoribus, & æqualibus eiusdem parabolæ, resectis lineis BD, diametro parallelis, & sic dispositis, vt BD, coeant, & sint axis totius figuræ; dabitur ratio cylindri ex EC, circa CF, ad annulum strictum ex illis portionibus circa CF. Hæc autem dabitur tali ordine, vt in prima parabola sit vt dupla basis semiparabolæ, cuius ABD, DBC, sunt portiones,

tiones, ad eandem basim. In secunda, vt tripla basis semiparabolæ, cum tripla differentia inter CD, & basim prædictam, ad duplam basim, cum vnica dicta differentia. In tertia, vt quadrupla basis, cum quadrupla prædicta differentia, & cum quadrupla harum tertia minori proportionali continuè, ad triplam basim semiparabolæ, duplam dictam differentiam, & vnicam tertiam proportionalem. Et sic in infinitum. Ex quibus per conuersionem rationis, facile patebunt proportiones cylindri ad solida ex figuris AEBFC, circa CF. Rationes petantur ex proposit. 15. primi lib. Imo, quæcumque dicta sunt in corollarijs superioribus, patet faciliter posse applicari suo modo cylindris, & solidis ex portione ABD, quatuor modis disposita vt dictum est.

COROLLARIVM IX.

Infertur nono. Quod si ABC, sit figura constans ex duabus portionibus ABD, CBD, maioribus, & æqualibus eiusdem parabolæ resectæ lineis BD, diametro parallelis, cui sit circumscriptum parallelogrammum EC; dabitur ratio cylindri ex EC, circa CF, ad solidum ex figura ABC, circa CF. Imo, etiam per conuersionem rationis, dabitur proportio quæ reperitur inter prædictum cylindrum, & solidum ex figura AEIBZFC, circa FC. Ordo autem proportionum, & asserti ratio, petantur ex proposit. 13. primi lib. Imo quæ-

cumque



cumque dicta sunt in corollarijs superioribus de figuris illis quatuor modis dispositis, patet posse etiam accomodari figuræ ABD.

COROLLARIVM X.

Infertur decimo; quod si qualibet parabola secetur duabus lineis HML, SBD, diametro Ik, parallelis, adeo vt intercipiant segmentum parabolæ LMIBD, & segmento sit circumscriptum

prum parallelogrammum HD, quod cum segmento intelligatur duplicatum quatuor modis sæpe dictis. Dabitur ratio cylindri ad solida. V. g. ex parallelogrammo HV, circa TV, ad solidum ex segmento circa TV. Ratio, & ordo dependent à proposit. 14. primi libri.

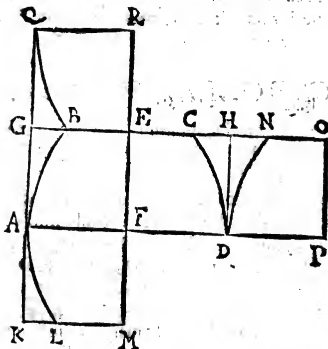
COROLLARIVM XI.

Infertur vndecimo; quod si ABCD, sit quodlibet ex infinitis segmentis parabolæ resectæ BC, basi AD, parallela, cui sit circumscriptum parallelogrammum DG, quod cum segmento vertetur circa HD: non solum dabitur ratio cylindri ex GD, ad annulum ex figura ABCD, circa HD, sed etiam per conuersionem rationis, & reliqua de ABEF, quatuor modis disposita concludentur, vt prius. Ratio autem, & ordo proportionis cylindrorum ad prædicta solida petantur ex secunda parte proposit. 8. primi lib.

COROLLARIVM XII.

Infertur duodecimo; quod si in eodem schemate supponamus ABCD, esse quodlibet ex infinitis duplicatis trapezijs, resectum BC, basi AD, parallela, & supponantur reliqua vt in schemate. Dabitur ratio cylindri ex GD, circa HD, ad solidum ex trapezio circa HD. Patet etiam, quod de

solidis



ſolidis trapezij **ABEF**, quatuor modis diſpoſiti poterimus ratiocinari ad modum ſuperiorum. Ordo vero, & ratio petantur ex propoſit. 9. primi libri.

COROLLARIVM XIII.

Infertur tertiodecimo; quod ſi ABEF, ſit ſegmentum ſemiparabolæ reſectum linea BE, diametro AF, parallela, quod ſegmentum intelligatur diſpoſitum quatuor modis vt ſæpe dictum eſt, & vt in ſchemate. Dabuntur rationes cylindrorum ad ſolida

lida orta ex rotationibus illarum figurarum ad modum superiorum. Et ratio, ordoque proportionum continentur in propos. 10. primi lib.

COROLLARIVM XIV.

Infertur quartodecimo; quod si A F, non sit diameter semiparabolæ, sed vtraque BE, AF, sint diametro parallelæ, adeo vt A B E F, sit segmentum semiparabolæ intermedium, & reliqua disponantur ad modum superiorum. Nihilominus dabitur ratio cylindri ex G D, circa H D, ad annulum strictum ex figura A B C D, circa H D. Ratio vero, ordoque deducentur ex proposit. 12. primi libri.

In omnibus ergo figuris, & magnitudinibus superiorum corollariorum patuit verum esse, rationem quatuor cylindrorum ad solida ex suis figuris eandem esse; nempe eam, quam habent quatuor parallelogramma, quæ sunt æqualia, ad figuras quatuor modis dispositas, quæ sic dispositæ semper sunt æquales.

Patuit ergo ex supradictis fæcunditas antecedentis propositionis, & quot solidorum ex ea habeamus mensuram. Sed etiam eius fæcunditas ex infra dicendis magis, magisque patebit.

PRO-

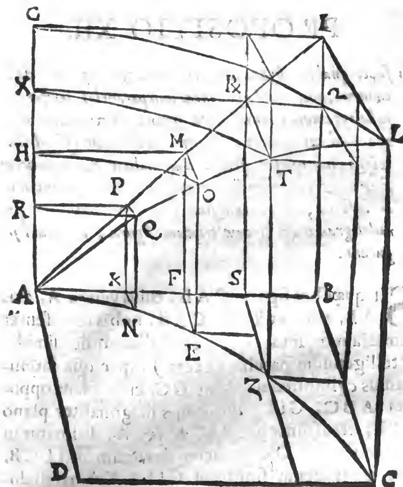
PROPOSITIO XII.

Si super qualibet figura circa axim in alteram partem deficientem, quæ resecta per lineas basi parallelas, semper parallelogramma circumscripta figuris ad verticem retineant ad eas eandem rationem, concipiatur cylindricus rectus quicumque sectus diagonaliter per verticem figuræ, & per basim figuræ oppositæ. Erit truncus dexter inferior, ad truncum sinistrum superiorem, vt parallelogrammum circumscriptum figuræ, ad ipsam figuram.

SIt quælibet figura C A B, cuius vertex A, axis A B, adeo vt figura C A B, nobis repręsentet dimidiam figuram (quod enim dicetur de dimidia intelligendum patebit de tota) super qua intelligamus cylindricum rectum G C, cuius plana opposita A B C, G I L, qui sectus diagonaliter plano I A L, transeunte per I L, & per A, dirimatur in duos truncos. Dico truncum dexterum A I L C B, esse ad truncum sinistrum G I L A, vt parallelogrammum D B, circumscriptum figuræ A B C, ad ipsam figuram.

Axis A B, secetur bifariam in F, & rursum partes bifariam in S, & K, & sic vsque libuerit, per quæ ducantur K N, F E, S Z, parallelæ B C, per quas in trunco dextero, & inferiori transeant plana K Q, F O, S T, parallela plano B L. Pariter per

Z R T,



℞T, MO, PQ, communes ſectiones horum planorum, & plani IAL, diagonaliter ducti, ducantur plana ℞TX, MHO, PRQ, parallela plano ABC, ſeù GIL. Facile patebit ℞Z, ME, PN, eſſe parallelogramma ſimilia parallelogrammo IC; & pariter figuras X℞T, HMO, RPQ, eſſe figuras

guras

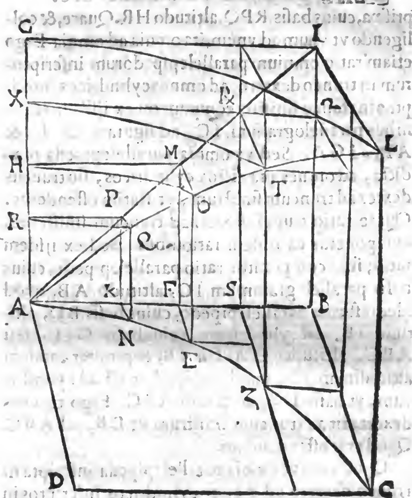
guras similes, & similiter positas figuris GIL, ABC; & probatur à Caualerio lib. 1. Geometr. Indiu. proposit. 19. vbi ostendit. Si conicus quicumque plano secetur basi æquidistante, concepta in eo figura erit similis basi, & similiter posita. Quare etiam ℞S, MF, Pk, erunt parallelæ IB; & pariter X℞, HM, RP, erunt parallelæ GI; & ℞T, MO, PQ, erunt parallelæ IL. Ergo cum in triangulo AIB, sit vt AB, ad BS, sic AI, ad I℞; & in triangulo AIG, vt AI, ad I℞, sic AG, ad GX. Erit & vt AB, ad BS, sic AG, ad GX. Et permutando vt AB, ad AG, sic BS, ad GX. Eodem modo ostenderetur vt AB, ad AG, sic esse BF, ad GH, Bk, ad GR; & consequenter faciliter ostendetur GX, XH, HR, RA, æquales esse, sicuti BS, SF, Fk, kA, æquales supponuntur. Quod notetur.

Quoniam autem parallelogrammum IC, ad parallelogrammum ℞Z, habet rationem compositam ex ratione IB, ad ℞S; nempe ex ratione IA, ad A℞; hoc est ex ratione IG, ad X℞; & ex ratione IL, ad ℞T; duæ vero rationes IG, ad X℞, & IL, ad ℞T, componunt rationem parallelogrammi circumscripti figuræ GIL, seù ABC, hoc est parallelogrammi DB, ad parallelogrammum circumscriptum figuræ X℞T, seù ASZ; & per suppositionem, vt parallelogrammum DB, ad figuram ABC, sic parallelogrammum circumscriptum figuræ ASZ, ad ipsam; vnde & permutando, vt

parallelogrammum ad parallelogrammum, sic figura ad figuram. Ergo & vt parallelogrammum IC, ad parallelogrammum ST, sic figura ABC, seù GIL, ad figuram ASZ, seù X℞Z. Quare & permutando, parallelogrammum IC, erit ad figuram GIL, vt parallelogrammum ST, ad figuram X℞T. Eodem modo ostendetur vt parallelogrammum IC, ad figuram GIL, sic FO, ad HMO, & PN, ad RPQ; idemque ostenderetur de alijs si adessent. Quod pariter notetur.

Tunc si super parallelogrammis ST, FO, KQ, concipiantur parallelepipeda, quorum altitudines KF, FS, SB, & quorum tantum vnum BT, ad euitandam confusionem, delineauimus; erit in trunco dextero inferiori inscriptum quodam solidum ex parallelepipedis sibi super impositis constans. Pariter si super X℞T, HMO, RPQ, intelligantur cylindrici, quorum altitudines GX, XH, HR, & quorum tantum TG, delineauimus; erit in trunco superiori sinistro inscriptum quodam solidum ex talibus prismatibus sibi superimpositis constans.

Quoniam autem parallelepipedum BT, ad prisma TG, habet, ex propos. 9. huius, rationem compositam ex ratione parallelogrammi ST, ad figuram X℞T, (quæ supra probata est esse eadem cum ratione IC, ad GIL) & ex ratione SB, ad GX; nempe ex supra dictis, ex ratione AB, ad AG. Ergo tale parallelepipedum ad tale prisma habebit



habebit rationem compofitam ex ratione IC, ad GIL, & ex ratione AB, ad GA. Eodem modo oftendetur ex ijfdem rationibus componi rationem parallelepipedi, cuius bafis ME, altitudo FS, ad prifma, cuius bafis HMO, altitudo XH; pariter parallelepipedi, cuius bafis PN, altitudo kF, ad prifma,

prisma, cuius basis RPQ, altitudo HR. Quare, & colligendo vt vnum ad vnum, ita omnia ad omnia. Ergo etiam ratio omnium parallelepipedorum inscriptorum in trunco dextero, ad omnes cylindricos inscriptos in trunco sinistro componetur ex ijsdem rationibus parallelogrammi IC, ad figuram GIL, & AB, ad GA. Sed vt omnia parallelepipeda prædicta, ad omnes prædictos cylindricos, sic truncus dexter ad truncum sinistrum, vt statim ostendetur. Quare ratio trunci dexteri ad truncum sinistrum componetur ex ijsdem rationibus. Sed ex ijsdem rationibus componitur ratio parallelepipedi, cuius basis parallelogrammum IC, altitudo AB, quod idem est cum parallelepipedo, cuius basis BD, altitudo IB, ad cylindricum, cuius basis GIL, seu ABC, altitudo GA, seu IB; & propter eandem altitudinem IB, parallelepipedum est ad cylindricum, vt basis DB, ad basim ABC. Ergo truncus dexter erit ad truncum sinistrum vt DB, ad ABC. Quod erat ostendendum.

Quod vero vt omnia parallelepipeda inscripta in trunco dextero ad omnes cylindricos inscriptos in trunco sinistro ita sit truncus dexter, ad truncum sinistrum, sic patebit. Si non est, vel truncus ad truncum est in maiori ratione, vel in minori. Sit primo in maiori. Ergo aliquid trunco dextero minus, erit ad truncum sinistrum in eadem ratione. Sit excessus penes M. (Licet sculptor non expresserit in schemate.) Diuidamus AB, bifariam, & rursum

partes

partes bifariam, & hoc semper fiat donec tandem deueniamus ad partem SB, adeo vt parallelepipedum, cuius basis IC, altitudo BS, sit minus V, & per puncta diuisionum fiat constructio, quæ prius dicta est. Pariter super planis IC, ST, FO, PN, in altitudinibus Ak, kF, FS, SB, mente concipiamus parallelepipeda trunco dextero circumscripta. Horum excessus supra parallelepipeda in trunco inscripta, erit æqualis parallelepipedo, cuius basis IC, altitudo BS, vt atente consideranti patebit; in hoc enim schemate repræsentare pareret nimiam confusionem. Patebit autem, quia sicut parallelepipedum, cuius basis IC, altitudo BS, superat parallelepipedum BT, quantitate duorum parallelepipedorum, quorum vnius est basis zT, seù BZ, altitudo Iz, alterius vero est basis ZC, altitudo IB; sic aliud parallelepipedum circumscriptum, cuius basis TS, altitudo BS, superaret parallelepipedum inscriptum, cuius basis ME, altitudo FS, duobus solidis similibus prioribus, qui excessus traslatus ad parallelepipedum BT, relinqueret nobis de ipso parallelepipedum æquale parallelepipedo, cuius basis ME, altitudo FS. Hoc autem semper continuando, tandem de parallelepipedo BT, nobis relinqueretur vltimum parallelepipedum circumscriptum, nempe cuius basis PN, altitudo Ak; quod tandem traslatum ad parallelepipedum BT, ipsum expleret. Redeamus ergo ad ordinem demonstrationis. Ergo, ex dictis, patet solida

cir-

circumſcripta trunco dextero ſuperare parallelepipeda ipſo inſcripta minori quantitate quam ſit V. Ergo truncus dexter ſuperabit ipſa ſolida inſcripta multo minori quantitate quam ſit V. Ergo parallelepipeda in trunco dextero inſcripta erunt ad truncum ſiniſtrum adhuc in maiori ratione DB, ad ABC. Sed vt DB, ad ABC, ſic probata ſunt parallelepipeda in trunco dextero inſcripta, ad cylindricos inſcriptos in trunco ſiniſtro. Ergo parallelepipeda inſcripta in trunco dextero, ad truncum ſiniſtrum erunt in maiori ratione, quam ad cylindricos in ipſo inſcriptos. Quod implicat. Non ergo truncus ad truncum erit in maiori ratione.

Sed nec in minori. Nam tunc; ergo conuertendo truncus ſiniſter erit ad truncum dexterum in maiori ratione quam ABC, ad DB. Ergo aliquid ipſo minus erit ad truncum dexterum in eadem ratione. Sit rurſum exceſſus penes V: & conſtructio, quæ facta fuit in trunco dextero fiat in trunco ſiniſtro, adeo vt cylindricus, cuius baſis GIL, altitudo GX, minus ſit V. Ergo truncus ſiniſter minus hoc cylindrico, erit ad truncum dexterum adhuc in maiori ratione ABC, ad DB. At cylindrici in trunco ſiniſtro inſcripti minus deficiunt ab ipſo, cylindrico cuius baſis GIL, altitudo GX. Ergo cylindrici in trunco ſiniſtro inſcripti ad truncum dexterum ſunt in multo maiori ratione, quam ſit ea, quam habet ABC, ad DB; nempe quam ſit eorumdem, ad parallelepipeda in trunco dextero inſcripta. Quod

rurſum

rursum implicat. Ergo in omnibus, & per omnia patuit truncum dexterum, esse ad truncum sinistrum vt DB, ad ABC. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Ex dictis ergo in præsenti propositione, & in proposit. 1. lib. primi, ac in schol. eiusdem, infertur quod si super qualibet infinitarum parabolarum, vel super quolibet infinitorum trilineorum concipiatur cylindricus rectus sectus diagonaliter, vt dictum est, infertur inquam truncum dexterum, esse ad truncum sinistrum, vt parallelogrammum parabolæ, seù trilineo circumscriptum, ad ipsam parabolam, seù trilineum. Hoc autem ostenditur etiam à Caualerio exerc. 5. proposit. 16. Sed per egregiam indiuisibilium viam, & in quodam cylindrico particulari, in quo latus, seù altitudo ipsius æquetur diametro parabolæ, seù trilinei. Quæ proposit. ex schol. 3. proposit. 10. huius, potest ad vniuersalitatem reduci; quia cylindricorum rectorum super eadem basi existentium, cuiuscumque sint altitudinis, eodem modo diagonaliter resectorum, omnes trunci sunt ad inuicem in eadem ratione. Ex dictis ergo, & ex proposit. 1. lib. 1. habemus rationem horum truncorum ad inuicem. Truncus enim dexter cylindrici super parabola, ad truncum sinistrum, est in prima vt 2. ad 1. In secunda, vt 3. ad 2. In tertia vt 4. ad 3. & sic

in infinitum: nempe vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. Ex quibus potest concludi, quod componendo, totus cylindricus erit ad truncum sinistrum, vt duplus numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. Nempe in 1. vt 3. ad 1. In secunda vt 5. ad 2. In tertia vt 7. ad 3. & sic in infinitum.

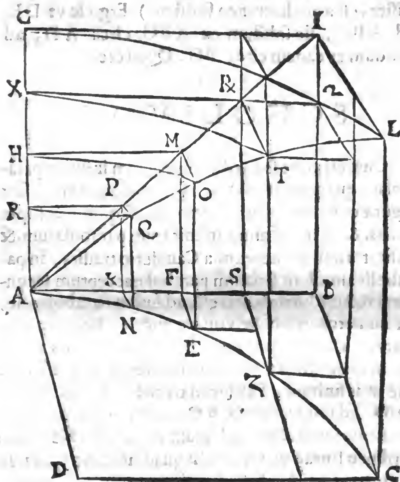
Pariter truncus dexter cylindrici super trilineo, erit ad truncum sinistrum, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad vnitatem. Nempe in primo, vt 2. ad 1. In secundo vt 3. ad 1. In tertio vt 4. ad 1. Vnde componendo, totus cylindricus erit ad truncum sinistrum, vt numerus trilinei binario auctus ad ipsam vnitatem, &c. vt clare patet.

PROPOSITIO XIII.

Si quælibet ex figuris antecedentis proposit. rotetur vna vice circa basim, alia circa basi parallelam ductam per verticem. Solidum rotundum circa tangentem in vertice, ad solidum rotundum circa basim, erit vt parallelogrammum circumscriptum figuræ, ad ipsam figuram.

ROtetur ergo figura ABC, circa basim BC, & circa AD, tangentem in vertice A. Dico solidum ex rotatione circa AD, esse ad solidum ex rotatione circa BC, vt DB, ad ABC. Nam super figura concepto cylindrico secto vt prius. Ergo truncus dexter, erit ad truncum sinistrum vt DB,

ad



ad ABC. Sed vt truncus dexter ad truncum ſiniſtrum, ſic ex ſchol. 3. propoſit. 10. huius, ſolidum ex figura ABC, circa AD, ad ſolidum ex eadem circa BC. (Nam truncus dexter talis ſectionis, eſt æqualis trunco dextero eiuſdem cylindrici ſecti pla-

no transeunte per BC, & per G, & truncus sinister, est æqualis trunco sinistro.) Ergo & vt DB, ad ABC, sic solidum ex ABC, circa AD, ad solidum ex eadem circa BC. Quod &c.

SCHOLIVM I.

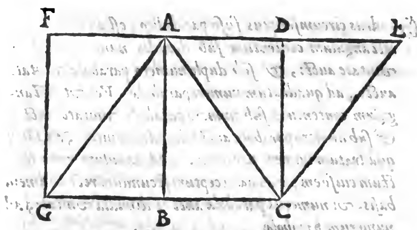
Cum ergo, vt supra dictum est, tam infinitæ parabolæ, quam infinita trilinea circa diametrum, sint figuræ conditionis supra expositæ, sequitur ex supra dictis, & ex quadratura infinitarum parabolarum, & infinitorum trilineorum à Caualerio tradita, in parabolis annulum strictum parabolæ acceptum secundum rectitudinem basis, esse ad fusum parabolicum, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ: nimirum in parabola lineari, esse vt 2. ad 1. In quadratica vt 3. ad 2. In cubica vt 4. ad 3. & sic in infinitum. Pariter in trilineis, solidum circa AD, ad solidum circa BC, erit vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad ipsam vnitatem. Nempe in trilineo lineari vt 2. ad 1. In quadratico vt 3. ad 1. In cubico vt 4. ad 1. & sic in infinitum.

SCHOLIVM II.

Cum ex scholio antecedenti habeamus modum compendiosum ostendendi cylindrum triplum esse coni super eadem basi, & circa eandem diametrum

cum

cum ipso, ideo placet hunc modum in præsenti subnectere.



Esto ergo rectangulum, cuius diameter AC, & triangulum ADC, rotetur circa DC, vt fiat conus ACE; rectangulumque AC, rotetur circa AB, vt fiat cylindrus FC. Conus GAC, ortus ex rotatione trianguli BAC, circa AB, est æqualis cono ACE; quia ambo coni oriuntur ex rotatione simili triangulorum æqualium, & similium. Sed solidum rotundum excauatum CDAFG, ex schol. ant. est duplum coni ACE. Ergo erit duplum coni GAC. Ergo componendo cylindrus FC, erit triplus coni GAC. Quod &c.

PRO-

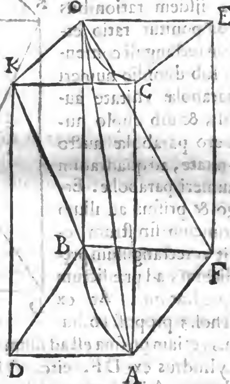
PROPOSITIO XIV.

Cylindrus circumscriptus fuso parabolico, est ad ipsum, vt rectangulum contentum sub dimidio numeri parabolæ vnitate aucti, & sub duplo numero parabolæ vnitate aucto, ad quadratum numeri parabolæ. Vel vt rectangulum contentum sub numero parabolæ vnitate aucto, & sub numero parabolæ aucto dimidia vnitate, ad idem quadratum numeri parabolæ. Ad annulum vero strictum eiusdem parabolæ acceptum secundum rectitudinem basis, vt numerus parabolæ auctus dimidia vnitate, ad numerum parabolæ.

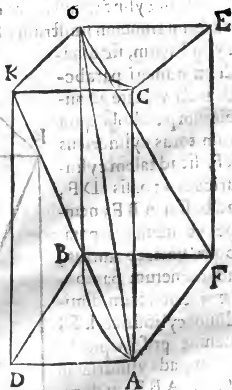
ESto quælibet semiparabola ABF, cuius axis BF, & ei sit circumscriptum parallelogrammum DF, quod cum ipsa intelligatur rotari circa AF. Dico cylindrum ex DF, esse ad semifusum BAF, in rationibus prædictis, & vt exemplificabitur in sequentibus. Et pariter sic esse ad solidum ex eadem semiparabola circa DB. Quod enim hic dicetur de semisolidis, verificabitur etiam de integris solidis iuxta titulum propositionis.

Tam super parallelogrammo, quam super semiparabola intelligantur cylindrici kF, BAFEOC, qui intelligantur secti plano diagonaliter transeunte per AF, & per kO. Ergo vterque cylindricus diuidetur in duos truncos, quorum illi cylindrici super parallelogrammo erunt prismata æqualia. Quoniam

niam prisma AFBDkO, nempe truncus sinister cylindrici super parallelogrammo, ad truncum ABFO, sinistrum cylindrici super semiparabola, habet rationem compositam ex ratione prismatis ad totum cylindricum super semiparabola, & huius ad suum truncum sinistrum; & vt prisma ad talem cylindricum, sic dimidium numeri parabolæ aucti vnitate ad numerum parabolæ (quia cum totus cylindricus kF, sit ad talem cylindricum vt basis DF, ad basim ABF; nempe vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ; erit etiam dimidium cylindrici kF, nempe prisma prædictum, ad cylindricum super ABF, vt dimidium numeri parabolæ aucti vnitate, ad numerum parabolæ.) Pariter cylindricus super ABF, ad suum truncum sinistrum, est ex schol. proposit. 12. huius; vt duplus numerus parabolæ auctus vnitate, ad ipsum numerum parabolæ. Ergo ratio prismatis ad truncum sini-



finiftrum cylindrici fuper A B F, componetur ex ijfdem rationibus; nempe ex ratione dimidij numeri parabolæ aucti vnitate, ad numerum parabolæ; & ex ratione dupli numeri parabolæ aucti vnitate, ad ipfum numerum parabolæ. At ex ijfdem rationibus componitur ratio etiam rectanguli contenti fub dimidio numeri parabolæ vnitate aucti, & fub duplo numero parabolæ aucto vnitate, ad quadratum numeri parabolæ. Ergo & prifma ad illum truncum finiftrum, erit vt rectangulum prędictum, ad prædictum quadratum. At ex fchol. 3. propof. 10. huius, etiam prifma eft ad illum truncum finiftrum, vt cylindrus ex D F, circa A F, ad folidum rotundum ex A B F, circa A F. Ergo & cylindrus circumfcriptus fufo parabolico, erit ad ipfum vt prædictum rectangulum ad quadratum numeri parabolæ. Patet ergo primum.



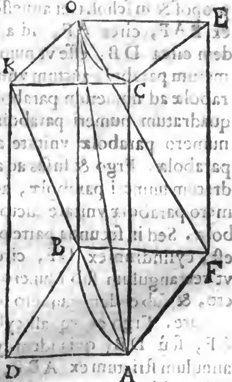
Secundum faciliter probatur: Quia rectangulum

lum sub dimidio numeri parabolæ aucti vnitate, & sub duplo numero parabolæ aucto vnitate, æquatur rectangulo sub numero parabolæ aucto vnitate, & sub eodem numero parabolæ aucto dimidia vnitate. Quare patet secundum.

Tertium sic probatur. Quoniam enim in antec. propos. & in schol. 1. ei annesso probatum est, fusum ex BAF, circa AF, ad annulum strictum ex eadem circa DB, esse vt numerus parabolæ, ad numerum parabolæ auctum vnitate: & vt numerus parabolæ ad numerum parabolæ auctum vnitate, sic quadratum numeri parabolæ ad rectangulum sub numero parabolæ vnitate aucto, & sub numero parabolæ. Ergo & fusus ad annulum, erit vt quadratum numeri parabolæ, ad rectangulum sub numero parabolæ vnitate aucto, & sub numero parabolæ. Sed in secunda parte propositionis probatum est, cylindrum ex DF, circa AF, esse ad fusum vt rectangulum sub numero parabolæ vnitate aucto, & sub eodem numero parabolæ aucto dimidia vnitate. Ergo ex æquali, cylindrus ex DF, circa AF, seu DB (quia idem cylindrus oritur) erit ad annulum strictum ex ABF, circa DB, vt rectangulum sub numero parabolæ aucto vnitate, & sub numero parabolæ aucto dimidia vnitate, ad rectangulum sub numero parabolæ, & sub numero parabolæ aucto vnitate; nempe propter commune latus numerum parabolæ auctum vnitate, vt numerus parabolæ auctus dimidia vnitate, ad numerum

parabolæ. Quare patet tertium, &c. Quod &c.

SCHOLIVM I.



Sed expedit in numeris rem exemplificare, vt eliciamus ex dictis, pulchram seriem, quæ reperitur in proportione cylindri ad prædictos annulos strictos. In prima ergo parabola, numerus parabolæ est 1. qui auctus vnitate facit 2; cuius dimidium est 1. duplus autem numerus parabolæ vnitate auctus facit 3. qui ductus in 1. facit 3; quadratum vero numeri parabolæ est 1. Ergo cylindrus erit ad primum fusum, qui est Rhombus conicus, & primus semicylindrus ad primum semifusum, qui est conus, vt 3. ad 1. Ex quibus patet etiam nunc cylindrum triplum esse coni &c. In secunda dimidium numeri parabolæ aucti vnitate est 1. cum dimidio; duplus

nume-

numerus parabolæ auctus vnitate est 5. rectangulum sub his est 7. cum dimidio: quadratum numeri parabolæ est 4. Ergo cylindrus erit ad secundum fusum, vt 7. cum dimidio ad 4; nempe vt 15. ad 8. In tertia dimidium est 2; duplus 7. rectangulum 14; quadratum 9. Ergo cylindrus erit ad tertium fusum vt 14, ad 9. Et sic poterimus in infinitum procedere. Eadem rectangula antecedentia colligemus si iuxta secundam partem propositionis multiplicabimus numerum parabolæ auctum vnitate, in numerum parabolæ auctum dimidia vnitate, vt clare patet.

SCHOLIVM II.

Ex dictis licet colligere, quod in proportione cylindri ad fusum non habemus aliquam pulchram seriem, quam tamen habemus in proportione cylindri ad annulum. Hæc autem talis est; quod series talium proportionum est vt series omnium numerorum imparium incipientium ab vnitate exclusiue, ad omnes numeros pares incipientes à binario inclusiue; adeo vt consequens proportionis deficiat à suo antecedenti vnitate. Ita vt cylindrus ad annulum primum sit vt 3. ad 2. Ad secundum vt 5. ad 4. Ad tertium vt 7. ad 6. Ad quartum vt 9. ad 8. & sic in infinitum. Quod facile conspicietur ex tertia parte præsentis proposit. Cum enim probatum sit cylindrum esse ad annulum vt numerus parabolæ auctus

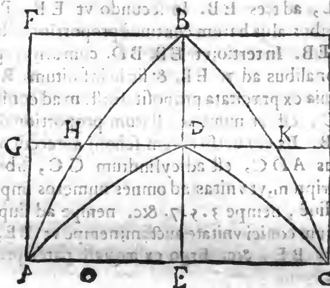
dimidia vnitate, ad ipsum numerum parabolæ. Ergo & vt duplum ad duplum. Nempe cylindrus erit ad annulum, vt duplus numerus parabolæ auctus vnitate, ad duplum numerum parabolæ. Verum cum progressio parabolarum sit vt series numerorum naturalium incipientium ab vnitate inclusiue 1. 2. 3. 4. &c. Patet seriem dupli numeri parabolæ esse 2. 4. 6. 8. &c. Et seriem dupli numeri parabolæ aucti vnitate esse 3. 5. 7. 9. &c. Quare patet propositum.

SCHOLIVM III.

Ex dictis in antec. schol. faciliter possumus deducere, & inuenire rationem cylindri circumscripti ad omnes conicos ortos ex reuolutione infinitorum trilineorum ABD, circa diametrum BD. Cum enim probatum sit, cylindrum ex parallelogrammo DF, circa DB, esse ad annulos ex figura ABF, circa DB, vt omnes numeri impares incipientes ab vnitate exclusiue, ad omnes numeros pares incipientes à binario inclusiue. Etiam per conuersionem rationis, cylindrus ad conicos infinitorum trilineorum ABD, circa BD, erit vt omnes prædicti numeri impares, ad vnitatem. Ergo cylindrus erit ad primum conicum, qui est conus vt 3. ad 1. Ad secundum vt 5. ad 1. Ad tertium vt 7. ad 1. & sic in infinitum: nempe vt duplus numerus conici vnitate auctus, ad vnitatem.

SCHO-

SCHOLIVM IV.



Ex doctrina tradita in scholio antec. possumus supplere eo, in quo deficit proposit. 5. huius; nempe possumus assignare rationem, quam habet quodlibet ex prædictis segmentis conicis, ad cylindrum sibi circumscriptum. Ratio autem, quæ reperitur inter prædicta solida est, quod segmentum ad cylindrum sibi circumscriptum sit vt tot continuè proportionales in ratione diametri totius conici, cuius est segmentum, ad diametrum conici ad verticem, incipiendo à diametro totius conici, vt earum numerus sit duplus vnitate auctus numeri conici, ad tot

diame-

diametros totius conici, quot sunt ipsæ. V. g. in schema proposit. 5. In primo conico, segmentum AHkC, erit ad cylindrum GC, vt EB, BD, cum L, ad tres EB. In secundo vt EB, BD, cum tribus alijs harum continuè proportionalibus, ad 5. EB. In tertio; vt EB, BD, cum alijs 5. proportionalibus ad 7. EB, & sic in infinitum. Ratio est, quia ex præcitata proposit. frustum ad conicum ADC, est vt numerus illarum proportionalium ad EB. Ex conuerso autem scholij antecedentis, conicus ADC, est ad cylindrum GC, sibi circumscriptum, vt vnitas ad omnes numeros impares successiuè, nempe 3. 5. 7. &c. nempe ad duplum numerum conici vnitate auctum; nempe vt BE, ad 3. 5. 7. BE, &c. Ergo ex æquali patet propositum.

PROPOSITIO XV.

Cylindrus circumscriptus cuilibet conoidi parabolico, est ad ipsum, vt numerus parabolæ auctus binario, ad numerum parabolæ. Ad solidum vero ortum ex reuolutione semiparabolæ circa parallelam ipsius axi ductam per extremum punctum basis, erit vt numerus rectanguli contenti sub numero parabolæ aucto vnitate, & sub numero parabolæ aucto binario, ad numerum minorem se binario.

IN schemate propositionis esto quælibet semiparabola BAF, cuius axis AF, basis BF, cui sit circumscriptum parallelogrammum DF. Dico cylindrum ex parallelogrammo circa AF, ad conoidem parabolicam ex semiparabola ABF, circa AF, esse vt numerus parabolæ auctus binario, ad numerum parabolæ. Nempe in prima parabola vt 3. ad 1. In secunda vt 4. ad 2. In tertia vt 5. ad 3. & sic in infinitum. Ad solidum vero ortum ex rotatione BFA, circa DB, nempe ad annulum strictum ex semiparabola acceptum iuxta rectitudinem diametri, esse vt rectangulum contentum sub numero parabolæ vnitate aucto, & sub numero parabolæ aucto binario, ad numerum minorem se binario. E. g. in prima parabola, numerus parabolæ vnitate auctus est 2. auctus vero binario est 3. Quorum rectangulum est 6. Ergo cylindrus erit ad tale solidum, vt 6. ad 4. In secunda parabola vt 12. ad 10. In tertia vt 20. ad 18. In quarta vt 30. ad 28. & sic in infinitum; quas proportiones patet posse reduci ad dimidium; nempe 3. ad 2. 6. ad 5. 10. ad 9. 15. ad 14. &c.

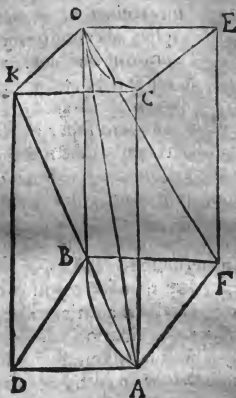
Tam super parallelogrammo, quam super semiparabola concipiantur cylindrici æquealti secti diagonaliter plano transeunte per AF, axim parabolæ, & per KO. Istud planum secabit tres cylindricos; nempe illum super parallelogrammo in duo prismata æqualia. Illum super trilineo BDA, in sinistrum ADkOB, & dexterum kOBA. Illum

vero

vero super semiparabola in sinistrum ABFO, & dexterum OCEFA. Prisma vero, seu truncus sinister cylindrici super parallelogrammo, est æqualis duobus truncis sinistris simul; nempe cylindricorum super trilineo, & super semiparabola; sicuti etiam prisma dexterum æquatur duobus truncis dexteris prædictorum cylindricorum, vt clare patet. Quoniam autem cylindricus super parallelogrammo, est ad cylindricum super trilineo, vt basis ad basim; nempe vt parallelogrammum ad trilineum; nempe vt numerus parabolæ auctus vnitate ad vnitatem; ergo & prisma, quod est dimidium cylindrici super parallelogrammo, erit ad cylindricum super trilineo, vt dimidium numeri parabolæ aucti vnitate, ad vnitatem. Pariter cylindricus super trilineo, est ad eius truncum sinistrũ vt numerus parabolæ binario auctus, ad numerum parabolæ auctum vnitate; vt elicitur ex proposit. 12. huius, & eius scholio; quia truncus sinister huius casus, est truncus dexter illius, vt consideranti patet. Quare cum ratio prismatis ad truncum sinistrum cylindrici super trilineo componatur ex ratione prismatis ad cylindricum super trilineo, & huius ad suum truncum sinistrum, componetur quoque ex ratione dimidij numeri parabolæ aucti vnitate ad vnitatem, & ex ratione numeri parabolæ aucti binario, ad numerum parabolæ auctum vnitate; nempe prisma erit ad talem truncum, vt rectangulum sub dimidio numeri parabolæ aucti vnitate, & sub numero parabolæ

auncto

aucto binario (hoc est vt rectangulum contentum sub numero parabolæ aucto vnitate, & sub dimidio numeri parabolæ aucti binario) ad rectangulum sub vnitate, & sub numero parabolæ aucto vnitate. Sed talia rectangula propter æquale latus numerum parabolæ auctum vnitate, sunt ad inuicem vt dimidium numeri parabolæ aucti binario, ad vnitatem; nempe vt numerus parabolę auctus binario ad binarium. Ergo & prisma erit ad truncum sinistrum cylindrici super trilineo, vt nume us parabolæ auctus binario, ad ipsum binarium. Quare & per conuersionem rationis, prisma idem ad



truncum sinistrum cylindrici super semiparabola, erit vt numerus parabolæ auctus binario, ad ipsum numerum parabolæ. Sed ex schol. 3. proposit. 10. huius, vt tale prisma ad talem truncum sinistrum, sic cylindrus ex DF, circa AF, ad conoides parabolicam ex BAF, circa AF. Quare, & cy-

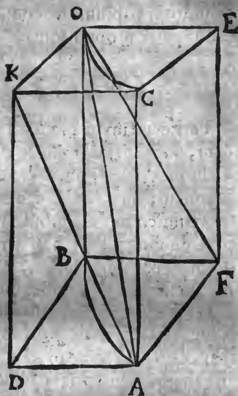
 lindrus

lindrus erit ad conoidem vt numerus parabolę auctus binario, ad numerum parabolæ. Quod primo probandum erat.

Secunda pars probatur retenta eadem constructione. Prisma dexterũ ad truncum dexterum cylindrici super trilineo, habet rationem compositam ex ratione ipsius ad cylindricum super trilineo; & huius ad suum truncum dexterum. Prisma ad cylindricum super trilineo, probatum est esse vt dimidium numeri parabolæ aucti vnitate ad vnitatem; cylindricus vero super trilineo est ad suum truncum dexterum, ex dictis in proposit. 12. & in schol. eiusdem (quia truncus dexter huius casus est sinister illius propositionis) vt numerus parabolæ auctus binario, ad vnitatem. Ergo ratio prismatis ad illum truncum dexterum componetur etiam ex prædictis rationibus. Sed ex dictis rationibus componitur etiam ratio rectanguli contenti sub dimidio numeri parabolæ aucti vnitate, & sub numero parabolæ aucto binario (nempe rectanguli sub numero parabolæ aucto vnitate, & sub dimidio numeri parabolæ binario aucti) ad quadratum vnitatis; nempe ad vnitatem. Quare illud prisma erit ad truncum dexterum cylindrici super trilineo vt rectangulum sub numero parabolæ aucto vnitate, & sub dimidio numeri parabolæ aucti binario, ad vnitatem; nempe vt rectangulum contentum sub numero parabolæ aucto vnitate, & sub eodem numero aucto binario (quod rectangulum est duplum prioris) ad

bina-

binarium. Ergo & per conuersionem rationis, prisma erit ad truncum dexterum cylindrici super parabola, vt numerus rectanguli contenti sub numero parabolæ aucto vnitate, & sub numero parabolæ aucto binario, ad numerum minorem se binario. At rursum ex schol. 3. proposit. 10. huius, vt prisma ad truncum dexterum cylindrici super semiparabola, sic cylindrus ex DF, ad solidum ex



BAF, reuolutis ambabus figuris circa DB. Ergo patet etiam secundum.

SCHOLIVM I.

Ex prima parte propositionis præsentis remanent probatæ duæ conclusiones, quæ ab Archymede, & ab alijs authoribus particulariter probantur: nimirum cylindrum triplum esse coni, & duplum conoidis parabolici quadratici, quorum eadem basis,

idemque axis cum cylindro, vt clare patet. Imo cylindrum triplum esse coni, probatur etiam ex secunda parte propositionis.

SCHOLIVM II.

Pariter etiam in præsenti proposit. habemus modum, quo satisfaciamus eo, in quo deficit proposit. 4. huius. Nimirum habemus modum assignandi rationem, quæ reperitur inter quodlibet segmentum cuiuscumque conoidis parabolici comprehensum duobus planis basi parallelis, & inter cylindrum ei circumscriptum. Cum enim ibidem probatum sit frustum quodcumque tale, ad illud conoides eiusdem generis, quod includit, esse vt tot continuè proportionales in proportione semidiametri maioris basis frusti ad semidiametrum minoris basis, incipiendo à prima, quotus est numerus conoidis auctus binario, ad tot talium proportionalium incipiendo itidem à prima, quotus est numerus conoidis duabus vltimis minoribus exceptis; hoc est ad tot proportionales quotus est numerus conoidis: & cum in præsenti proposit. probatum sit conoides parabolicum esse ad cylindrum sibi circumscriptum, vt numerus parabolæ, ad numerum parabolæ auctum binario; nempe vt sunt prædictæ proportionales ad talem magnitudinem, quæ ad ipsas sit vt numerus parabolæ binario auctus ad ipsum numerum parabolæ. Sequitur ex æquali, segmentum, seù frustum

ſtum eſſe ad cylindrum ſibi circumſcriptum, vt tot proportionales in proportione prædicta, quotus eſt numerus conoidis binario auctus, ad magnitudinem, quæ ſit ad eaſdem proportionales, duabus vltimis minoribus exceptis, vt numerus parabolæ binario auctus ad numerum parabolæ. V. g. conuertendo, in primo conoide, fruſtum AHKC, erit ad cylindrum GC, vt AE, HD, cum tertia proportionali, ad tres AE. In ſecundo, vt AE, HD, cum duabus alijs harum continuè proportionalibus, ad duas AE, cum duabus HD. In tertio vt AE, HD, cum tribus proportionalibus ad magnitudinem, quæ ſit ad AE, HD, cum tertia proportionali vt 5. ad 3. Et ſic in infinitum.

SCHOLIVM III.

Per ea ergo, quæ vſque modo oſtenſa ſunt, patet in parte ampliari poſſe doctrinam Andreæ Tacquet nobilis, & acutiſſimi Geometræ, traditam in ſuo opere ſupra citato. Cum enim lib. 1. part. 2. propoſit. 32. patefaciat, portionem cylindrici parabolici per axem baſeos, & punctum in latere abſciſſam, pyramidis ſibi inſcriptæ ſeſquialteram eſſe; ac proinde tradat cubationem talis portionis; haud poſtea nobis manifeſtat proportionem portionis cylindrici per baſim parabolæ, & punctum in latere, ad pyramidem ſibi inſcriptam. Et hoc fortaſſis, quia nequaquam habebat proportionem cylindri

ad

ad fusum parabolicum quadraticum; quam proportionem subtilissimus Keplerus geometris proposuit inuestigandam in sua steriometria doliorum, & quam primus omnium adinuenit Caualerius, quamque nos docuit in exercit. 4. proposit. 24; quæ proportio forsitam erat Tacquet necessaria scitu pro cubanda tali portione cylindrici. Vel ergo Tacquet haud vidit exercitationes Caualerij impræssas anno 1647 (sicuti nec nos vidimus opus Tacquet impressum anno 1651, nisi anno 1658:) Vel si vidit, attamen Caualerianam doctrinam non approbauit, vtpote per indiuisibilia procedentem. Cum ergo fortassis careret modo ipsam ostendendi more antiquorum (vt sępe accidit, quia non omnes possunt omnia adinuenire) vt factis comprobaret, quæ verbis expręssit de indiuisibilibus in schol. proposit. 12. primæ partis lib. 1. & alibi, eam libenter omisit. Si ergo Tacquet recepisset doctrinam Caualerij per indiuisibilia procedentem, potuisset non modo cubare portionem cylindrici parabolici super quacumque infinitarum parabolarum per basim parabolæ, & punctum in latere; sed etiam ex ijs, quę in eadem exercit. 4. Caualerij tradunt ipse, & Beugrand, potuisset cubare segmenta portionis cuiuscumque cylindrici parabolici resectæ planis sectioni maximæ parallelis. Imo ex doctrina tradita à Caualerio potuisset etiam cubare, & portionem cylindrici super hyperbola per basim hyperbolę, & punctum in latere; & segmenta huius portionis resectę planis

planis ſectioni maximę parallelis (ſupponendo tamen hyperbolę quadraturam, vt facit Caualerius; de quibus fortaſſis & nos aliquando, dum aſſignabimus centrum grauitatis hyperbolę, & in qua linea diametro parallela ſit centrum grauitatis ſemihyperbolę ſuppoſita hyperbolę quadratura, de quibus nullus geometra, quod ſciamus, vſque modo locutus eſt; quibus in cubationibus videtur deficere opus Tacquet; nam in ſuo opere de propoſitionibus, & cubationibus prędictis verba non habet. Sed etiam, per à nobis oſtenſa, partim poteſt ſuppleri multis, & pluribus ſatisfiet ex dicendis imposterum. Imo multis etiam ſatisfiet, quibus non licet ſatisfacere ex traditis à Caualerio, vt patebit inferius. Ex dictis autem à nobis, & ex dicendis magis habet Tacquet vnde ſibi ſatisfaciat, quam ex traditis à Caualerio. Nam in parabola quadratica non eſt opus per indiuiſibilia procedere. Cum enim ea omnia, quę circa illa ſolida à nobis oſtenſa ſunt dependeant à quadratura infinitarum parabolarum; & omnia, præter parabolarum quadraturam, oſtenſa ſint à nobis more antiquorum, & parabolæ quadraticæ habeamus pęnes innumeras quadraturas ab authoribus more antiquorum aſſignatas. Ergo ea omnia, quæ à nobis oſtenſa ſunt, in parabola quadratica tradita fuere more antiquorum; nec de ipſis poteſt Tacquet hæſitare. Cum ergo veterum more teneamus rationem cylindri ad fuſum parabolicum quadraticum, & ad ſegmentum conoidis parabolici quadratici,

tici, more etiam veterum habebimus cubationem portionis cylindrici parabolici per basim parabolæ, & punctum in latere abscissæ. Item cubationem portionis cylindrici super segmento parabolæ contento inter duas lineas basi parallelas abscissæ per axim segmenti, & punctum in latere. Sed hæc, & alia proprijs patebunt locis.

Explicit Liber Secundus.



DE INFINITIS PARABOLIS, ETC.



LIBER TERTIVS.



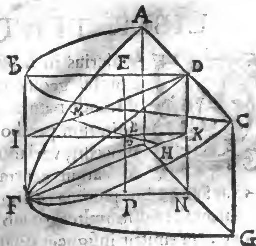
Aualerius in sæpe citatis exercitationibus geometricis, exerc. 5. explicando naturas, passionesque infinitarum parabolarum, vlterius procedit, variaque de attinentibus ad earum centra grauitatis pronuntiat: ex quibus plurima colligit pro sua doctrina de vniformiter difformiter grauibus, &c. Sed ante omnia, præmittit insignem quandam propositionem, & à se per indiuisibilia, & ab eximio Torricellio sine indiuisibilibus, ostensam. Propositio Caualerij est vniuersalior; sed vt ipsemet bene aduertit, etiam propositio Torricellij ad eandem vniuersalitatem potest reduci. Propositio ergo ista, quam habet Caualerius exercit. 5. proposit. 17. quam & nos probabimus, demonstrationem Torricel-

lij repetendo, eamque vniuersalissime proponendo, sequens est.

PROPOSITIO I.

Si super qualibet figura circa diametrum intelligatur cylindricus rectus, sectus diagonaliter modo sæpe supra explicato. Truncus dexter, erit ad truncum sinistrum reciproce vt partes diametri figuræ resectæ à centro grauitatis.

SVper qualibet figura OFG, circa diametrum FN, siue sit in alteram partem deficiens, siue in ambas, siue in nullam, sit cylindricus rectus ABCGOF, sectus diagonaliter plano transeunte per AC, & per F, & sint E, P, centra grauitatis figurarum oppositarum. Dico truncum dexterum, esse ad truncum sinistrum reciproce vt FP, ad PN. Ducantur rectæ BF, EP, DN, DF, & à medijs punctis ipsarum BF, DN, nempe I, k, rectæ ID, kF, necnon



non Ik, secans EP, in L. Erunt itaque BF, EP, DN, inter se parallelæ, quia iungunt æquales, & parallelas. Ob eandem rationem, erunt parallelæ BD, IK; IK, FN; DI, kF. Quoniam vero DI, bifariam secat BF, & ideo bifariam quoque secabit omnes in triangulo DBF, ipsi BF, æquidistantes, quæ sunt diametri parallelogrammorum in solido ABCF, plano AG, parallelorum, vt clare patet. Ergo ID, transibit per centrum grauitatis vniuscuiusque illorum; ac proinde in eadem ID, erit centrum grauitatis trunci sinistri ABCF. Hoc supponatur esse M. Eodem modo ostendemus in FK, esse centrum grauitatis trunci dexteri. Cum ergo L, medium punctum EP, sit centrum grauitatis, totius cylindrici; ergo si ab M, per L, producatur MLH, vsque ad Fk, cui incidat in H, erit H centrum grauitatis trunci dexteri, vt elicitur ex Archi. p. æquip. proposit. 8. Quia ergo triangula MIL, LHk, sunt similia, propter parallelas DI, kF, ideo vt ML, ad LH, ita IL, ad Lk. Sed vt ML, ad LH, sic reciproce truncus dexter, ad truncum sinistrum, ex eodem Archi. ibidem proposit. 6. & 7. Ergo & vt FP, ad PN, sic reciproce truncus dexter, ad truncum sinistrum. Quod &c.

SCHOLIVM.

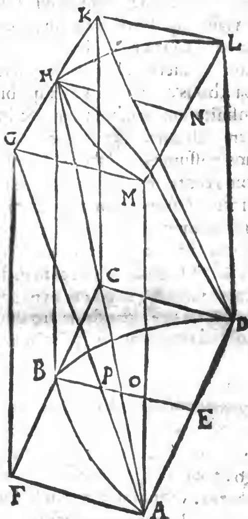
Vt diximus supra, hæc propositio est vniuersalissima, adeo vt comprehendat omnes figuras circa diametrum. Quamuis autem supposuerimus planum transire per A C, & per F, nihilominus idem concludetur, etiam si planum secans transeat per O G, & per B; truncus enim dexter, erit ad truncum sinistrum reciproce vt F P, ad P N. Cylindricus enim sectus siue vno, siue altero modo, semper secatur in truncos, quorum dexteri, sicuti & sinistri, sunt inter se æquales. Notetur autem, non modo hanc propositionem veram esse, sed etiam eius conuersam, vt ait Caualerius ibidem in corollario; nimirum, quod centrum grauitatis figuræ circa diametrum sic diametrum secat, vt partes ipsius, sint in ratione reciproce cum truncis cylindrici.

PROPOSITIO II.

Centrum grauitatis figuræ proposit. 12. secundi libri, sic diuidit eius axim, vt pars ad verticem, sit ad reliquam vt parallelogrammum circumscriptum figuræ ad ipsam figuram.

SIt quælibet talis figura A B D, cuius diameter B E, centrum grauitatis O. Dico esse vt BO,

BO, ad OE, sic parallelogrammum FD, ad figuram ABD. Hoc facile patet; quia ex prædicta proposit. parallelogrammum FD, est ad figuram, vt truncus dexter ad truncum sinistrum. Sed ex proposit. anteced. vt truncus dexter ad truncum sinistrum, sic BO, ad OE. Ergo vt BO, ad OE, sic FD, ad ABD. Quod &c.



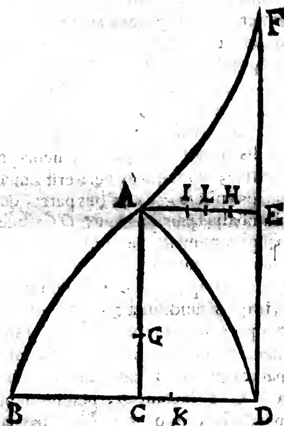
SCHOLIVM I.

Cum ergo ex dictis in primo, & secundo libro, tam infinitæ parabolæ, quam infinita trilinea, sint figuræ

figuræ prædictæ conditionis; ergo centra grauitatis, seù æquilibrij ipsarum, secabunt earum axes in prædicta ratione. Hanc propositionem probat etiam Caualerius, loco supra citato, particulariter in parabolis, & trilineis; ex quibus, & ex quadratura infinitarum parabolarum, & infinitorum trilineorum, deducit in primo corollario id, quod etiam nos possumus deducere. Nimirum in primo trilineo, centrum grauitatis eius duplicati ad partes diametri, seù centrum æquilibrij eiusdem, sic secare eius diametrum, vt pars ad verticem, sit ad reliquam, vt 2. ad 1. In secundo, vt 3. ad 1. In tertio vt 4. ad 1. & sic deinceps in infinitum aucto antecedente vnitate, & retenta vnitate pro consequente. In prima vero parabola sic diuidit diametrum, vt pars ad verticem, sit ad reliquam vt 2. ad 1. In secunda, vt 3. ad 2. In tertia vt 4. ad 3. & sic in infinitum, auctis semper tam antecedente, quam consequente vnitate. Vnde in trilineo, est pars diametri ad verticem terminata, ad reliquam, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad vnitatem. Et componendo, tota diameter est ad eius partem ad basim terminatam, vt numerus parabolæ binario auctus, ad vnitatem. In parabola autem, est pars diametri terminata ad verticem, ad reliquam, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. Et componendo, tota diameter est ad partem ad basim terminatam, vt duplus numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ.

SCHO-

SCHOLIVM II.



His probatis vlterius pergit Caualerius, ostendens in proposit. 20. in qua linea sit centrum grauitatis cuiuslibet semiparabolæ. Inquit ergo, quod si H, sit centrum grauitatis duplicati trilinei FAD, seù

ſeù æquilibrij ſolius trilinei ADE (quod enim eſt centrum grauitatis duplicati, eſt centrum æquilibrij ſimpli) & DC, ſic diuidatur in K, vt ſit ſicut AE, cum EH, ad AH, ſic Dk, ad kC, quod k, erit centrum æquilibrij ſemiparabolæ; & conſequenter, quod in linea ducta per k, AC, parallela, erit centrum grauitatis ſemiparabolæ. Ex quibus poteſt concludi, quod in prima parabola, erit DK, ad KC, vt 4. ad 2. In ſecunda vt 5. ad 3. In tertia vt 6. ad 4. & ſic deinceps in infinitum, auctis vtriſque terminis vnitate; vnde antecedens talis proportionis, erit numerus parabolæ auctus ternario, conſequens vero erit numerus parabolæ auctus vnitate. Ex quibus patet, quod iunctis ſimul ambabus partibus baſis DC, ipſa erit ad Ck, vt duplus numerus parabolæ quaternario auctus, ad numerum parabolæ auctum vnitate. Vnde in vnaquaque ſemiparabola, eius ſemibaſis talium partium, in quas diuiditur à centro æquilibrij ſemiparabolæ, aptè explicatur per duplum numerum parabolæ quaternario auctum, & eius dimidia per numerum parabolæ binario auctum. In prima enim parabola 4. & 2. faciunt 6, nempe duplum numerum parabolæ cum quaternario. In ſecunda 5. & 3. faciunt 8. In tertia 6, & 4, faciunt 10. qui numeri continent numerum parabolæ duabus vicibus, & quaternarium; & ſic in infinitum.

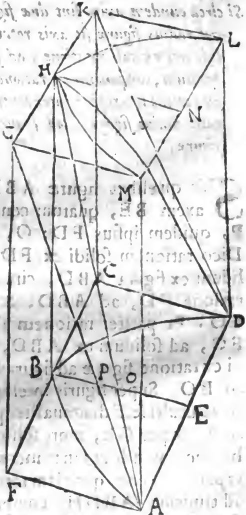
PRO-

PROPOSITIO III.

Si circa eundem axim sint duæ figuræ, quæ rotentur sic vt radius figuræ sit axis rotationis. Ratio vnius solidi orti ex tali rotatione, ad solidum aliud ex eadem genitum, componetur ex ratione figuræ ad figuram, & ex ratione interceptæ inter centra rotationis, & grauitatis vnius figuræ, ad similem interceptam alterius figuræ.

SInt quælibet figuræ ABD, FCDA, circa axem BE, quarum centra grauitatis P, O; P, quidem ipsius FD; O, vero ipsius ABD. Dico rationem solidi ex FD, circa DA, ad solidum ex figura ABD, circa DA, componi ex ratione FD, ad ABD, & ex ratione EP, ad EO. Et pariter rationem solidi ex FD, circa FC, ad solidum ex ABD, circa FC, componi ex ratione figuræ ad figuram, & ex ratione BP, ad BO. Super figuris intelligantur cylindrici recti æquealti secti diagonaliter plano transeunte per AD, & per Gk, more solito. Hoc planum secabit duos cylindricos in truncos dexteros, & sinistros vt patet. Tunc, quoniam ratio trunci AFCDKG, ad truncum ABDH, componitur ex ratione ipsius ad cylindricum super FD; huius ad cylindricum super ABD; & huius ad prędictum suum truncum sinistrum: & cum sit vt prædictus truncus sini-

ſter AFCDkG, ad truncum ſiniſtrum ABDH, ſic ex ſcholio 3. propoſit. 10. ſecundi huius, ſolidum ex figura FD, circa AD, ad ſolidum ex ABD, circa eandem. Ergo, & rationes horum ſolidorum rotundorum componentur ex iiſdem rationibus. Verum quoniam ex propoſit. 1. huius.componendo, & conuertendo, truncus ſiniſter cylindrici ſuper FD, eſt ad totum cylindricum ſuper FD, vt PE, ad BE; & cylindricus ſuper FD, eſt ad cylindricum ſuper ABD, vt FD, ad ABD; & pariter cylindricus ſuper ABD, eſt



ad ſuum truncum ſiniſtrum ex præcitata propoſit. 1. componendo, vt BE, ad EO. Ergo ſolidum ex figura FD, ad ſolidum ex figura ABD, ambabus reuo-

reuolutis circa AD, habebit rationem compositam ex rationibus PE, ad EB; hujus ad EO (nempe ex ratione sola PE, ad EO) & ex ratione FD, ad ABD. Eodem modo probaretur solidum ex FD, circa FC, ad solidum ex figura ABD, circa FC, componi ex supra dictis rationibus. Quare patet propositum.

SCHOLIVM I.

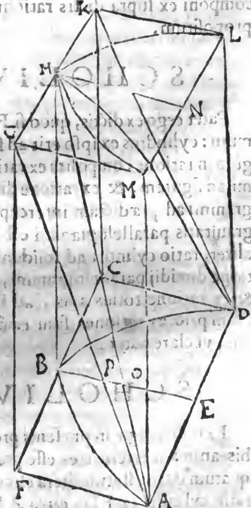
Patet ergo ex dictis, quod si FD, sit parallegrammum: cylindrus ex ipso erit ad solidum ex altera figura in ratione composita ex ratione parallelogrammi ad figuram; & ex ratione dimidij axis parallelogrammi ad prædictam interceptam; quia centrum grauitatis parallelogrammi est in medio axis. Vel aliter, ratio cylindri ad solidum componetur ex ratione dimidij parallelogrammi, ad alteram figuram, & ex ratione totius axis, ad illam interceptam. Nam priores rationes sunt eædem cum posterioribus, vt clare patet.

SCHOLIVM II.

Ex dictis ergo in præsenti propositione licet nobis animaduertere, tres esse proportiones, duabus quarum datis, statim altera elicitur. Hæ autem sunt; ratio cylindri ex FD, circa AD, vel FC, ad alterum solidorum rotundorum ex figura ABD, vno,

 vel

vel altero modo reuoluta; ratio parallelogrammi ad figuram; & ratio EB, ad EO, vel BO; vel ratio dimidiæ BE, ad EO, vel BO. Datis enim rationibus parallelogrammi ad figuram, & dimidiæ BE, ad alteram ipsarum EO, BO, statim datur ratio cylindri ex FD, ad alterutrum solidorum rotundorum ex figura. Pariter datis rationibus cylindri ad solidum rotundum ex figura, & parallelogrammi ad figuram, si hæc subtrahatur à ratione cylindri ad solidum rotundum; relinquetur ratio dimidiæ EB, ad BO, vel OE; & consequenter dabitur centrum grauitatis figuræ. Si vero dentur rationes cylindri ad solidum, & dimidiæ EB, ad BO, vel EO, quæ subtrahatur à ratione



cylin-

cylindri ad solidum; relinquetur ratio parallelogrammi ad figuram, & consequenter figuræ quadratura. Imo ex dictis aduertatur etiam, quod si dentur proportiones parallelogrammi F D, ad figuram A B D, & dimidiæ B E, ad O B, vel O E; dabuntur etiam cubationes truncorum cylindrici super figura. Nam cum, datis explicatis, detur etiam ratio cylindri ad solidum rotundum ex figura; & cum hæc ratio sit eadem ex schol. 3. proposit. 10. huius, cum ratione prismatis, nempe dimidij cylindrici super parallelogrammo, ad alterutrum truncorum cylindrici super figura: patet dari talium truncorum cubationes.

SCHOLIVM III.

Ex supradicta ergo doctrina, & ex dictis in scholijs antecedentis proposit. patet quomodo possimus habere rationem cylindrorum circumscriptorum omnibus fusis parabolicis: omnibus annullis strictis infinitarum parabolarum acceptis iuxta rectitudinem basis: omnibus conoidibus parabolicis: omnibus annullis strictis ortis ex rotatione semiparabolarum circa ductam per extremitatem basis diametro parallelam: omnibus solidis ex rotatione infinitarum trilineorum circa basim: omnibus solidis ex ijsdem reuolutis circa parallelam basi ductam per verticem: omnibus conicis: & omnibus solidis ex ijsdem circa basim semiparabolæ, ad ipsa solida. Sed

quia

quia hæ rationes in superiori libro patefactæ sunt, & ex dictis in præsenti eadem colligerentur, ideo scienter hoc relinquimus industriæ lectoris.

PROPOSITIO IV.

Solida rotunda genita ex duplici reuolutione cuiuslibet figuræ planæ circa axim taliter reuoluta, vt in vtraque reuolutione axis figuræ sit radius rotationis, & axis extremitates centra. Sunt adinuicem in ratione partium axis figuræ secti à centro grauitatis figuræ, & terminatarum ad centra reuolutionum.

ESto quælibet figura ABD, in sch. prop. ant. circa axim BE, cuius centrum grauitatis O. Dico solidum rotundum ex figura ABD, circa AD, nempe cuius radius rotationis BE, centrum E, ad solidum rotundum ex eadem figura circa FC, nempe cuius radius rotationis BE centrum B, esse vt EO, ad OB. Figuræ intelligatur circumscriptum parallelogrammum FD. Quoniam enim ratio solidi rotundi ex figura ABD, circa AD, ad solidum ex eadem figura circa FC, componitur ex ratione ipsius ad cylindrum ex FD, siue circa AD, siue circa FC, quia oritur idem cylindrus; & huius ad solidum ex figura circa FC: & ex schol. propofit. anteced. ratio solidi ex figura ABD, circa AD, ad cylindrum componitur ex ratione figuræ ad parallelogrammum, & ex ratione EO, ad

dimi-

dimidiam EB; & pariter ex eodem ſcholio, ratio cylindri ex parallelogrammo, ad ſolidum ex figura circa FC, componitur ex ratione parallelogrammi ad figuram, & ex ratione dimidiæ BE, ad BO. Ergo & ratio ſolidi ex figura ABD, circa AD, ad ſolidum ex figura ABD, circa FC, componetur ex ratione figuræ ad parallelogrammum, & parallelogrammi ad figuram (quę proportio ex his compoſita, eſt æqualitatis) & ex proportionibus EO, ad dimidiam BE, & huius dimidiæ ad BO, (nempe ex ratione EO, ad OB). Ergo ſolidum ex figura circa AD, ad ſolidum ex figura circa FC, erit vt EO, ad OB. Quod erat oſtendendum.

ALITER.

SVper figura ABD, concipiatur cylindricus rectus ſectus diagonaliter plano tranſeunte per AD, & per H. Quoniam ex propoſit. 10. ſecundi, tam truncus dexter eſt ad ſolidum ex ABD, circa FC, quam truncus ſiniſter ad ſolidum ex eadem figura circa AD, vt HB, ad circumferentiam circuli, cuius radius BE. Ergo & truncus dexter erit ad ſolidum circa FC, vt truncus ſiniſter ad ſolidum circa AD. Quare & permutando, vt truncus dexter ad truncum ſiniſtrum; nempe ex propoſit. 1. huius. vt reciproce BO, ad OE, ſic ſolidum ex figura circa FC, ad ſolidum ex eadem figura circa AD. Quod &c.

SCHO-

SCHOLIVM.

Quam vero fæcundæ ſint ſuperiores propoſitiones, & quam copioſi ſint fructus, quos ex ipſis colligere licet, in ſequentibus patebit. Interea ſit.

COROLLARIVM I.

Quod ſi ABD, ſit quælibet ex infinitis parabolis: ſolidum ex ipſa circa FC, nempe annulus ſtrictus ſecundum rectitudinem baſis, erit ad ſolidum ex eadem figura circa AD, nempe ad fuſum parabolicum, vt numerus parabolę auctus vnitate ad numerum parabolæ. Nempe in prima parabola vt 2. ad 1. In ſecunda vt 3. ad 2. &c.

COROLLARIVM II.

Si vero BCD, quodlibet infinitorum trilineorum rotetur primo circa BE, deinde circa CD: ſolidum ex trilineo circa BE, ad ſolidum ex trilineo circa CD, erit vt numerus trilinei vnitate auctus ad vnitatem.

COROLLARIVM III.

Verum ſi ſemiparabola BDE, rotetur prius circa CD, poſtea circa BE, vt fiat conoides parabolicum:

bolicum: solidum circa C D, ad solidum circa B E, erit vt numerus parabolæ ternario auctus ad numerum parabolæ vnitate auctum. Nempe in prima parabola vt 4. ad 2. In secunda vt 5. ad 3. In tertia vt 6. ad 4. & sic in infinitum. Rationes supradictorum corollariorum dependent ex scholijs primæ huius.

PROPOSITIO V.

Cuiuscumque semiparabolæ centrum grauitatis inuenire.

Esto semiparabola ABC, cuius vertex B, & oporteat eius centrum grauitatis reperire. Diameter BA, sic secetur in D, vt BD, sit ad DA, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ. Ergo ex scholio 1. proposit. 2. huius, D, est centrum grauitatis parabolæ, & consequenter centrum æquilibrij semiparabolæ A B C, appensæ secundum BA. Ergo si ducatur D F, A C, parallela in ea erit centrum grauitatis semiparabolæ. Pariter C A, sic se-

cetur in E, vt CE, ſit ad EA, vt numerus parabolæ ternario auctus, ad numerum parabolæ vnitate auctum. Ergo ex ſcholio 2. eiuſdem propoſit. E, erit centrum æquilibrij ſemiparabolæ acceptæ ſecundum rectitudinem AC. Ergo ſi ducatur EL, BA, parallela, in ipſa erit, centrum grauitatis ſemiparabolæ. Sed & in DF. Ergo erit punctum H. Inuentum eſt ergo centrum grauitatis ſemiparabolæ. Quod &c.

PROPOSITIO VI.

Si per centrum grauitatis cuiuſcumque ſemiparabolæ, & per verticem ducatur linea ſecans baſim. Hæc eam taliter ſecabit vt pars ad diametrum, ſit ad reliquam vt duplus numerus parabolæ vnitate auctus ad ternarium.

Sint eadem, quæ in antecedenti propoſit. & ſit ducta BHK. Dico AK, eſſe ad KC, vt duplus numerus parabolæ auctus vnitate, ad ternarium. V.g. in prima parabola vt 3. ad 3. In ſecunda vt 5. ad 3. In tertia vt 7. ad 3. In quarta vt 9. ad 3. & ſic in infinitum. Semiparabolæ circumſcribatur parallelogrammum AM, & EG, producatur vſque ad L. Quoniam enim triangulum BHL, ad verticem ſimile eſt triangulo EHk; ergo vt LH, ad HE, ſic BL, ſeu AE, ad Ek. Sed LH, eſt ad HE, vt numerus parabolæ vnitate auctus

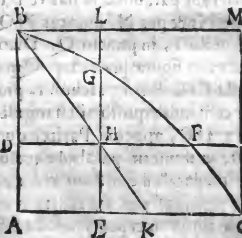
ad

ad numerum parabolæ. Ergo & AE, erit ad Ek, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ. Sed AE, ex dictis, erat ad totam EC, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ auctum ternario. Ergo AE, erit ad reliquam kC, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad ternarium; & Ek, erit ad eandem KC, vt numerus parabolæ ad ternarium. Ergo componendo ambas simul AE, Ek, erit Ak, ad kC, vt duplus numerus parabolæ vnitate auctus ad ternarium. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO VII.

Residui cuiuscumque semiparabolæ, dempto ab ea triangulo inscripto, centrum grauitatis assignare.

DEterminauimus & in superiori propositione, & in præsenti, & in aliquibus ex sequentibus procedere per modum problematis, ob euitandam titulorum longitudinem, & prolixitatem, quæ



est ineuitabilis si tales propositiones proponantur per modum Theorematis. Sit ergo quæcumque semiparabola, prima excepta, A D C, in qua sit inscriptum triangulum A D C. Oportet reliquæ figuræ contentæ sub recta, & curua A C, centrum grauitatis assignare.

Diuidatur C D, in punctis F, & E; in F, vt C F, sit dupla F D; in E, vero, vt C E, sit ad E D, vt numerus parabolæ ternario auctus, ad numerum parabolæ auctum vnitate. Fiat deinde, vt numerus parabolæ vnitate minutus, ad numerum parabolæ vnitate auctum sic F E, ad E G; & per G, ducatur G H k, parallela diametro A D, secans rectam A C, in H, curuam in k, & A R, latus parallelogrammi circumscripti in T. Pariter A D, secetur in L, vt A L, sit dupla L D; & in M, vt A M, sit ad M D, vt numerus parabolæ auctus vnitate, ad numerum parabolæ; & fiat vt F E, ad E G, sic L M, ad M N; & per N, ducatur N Q P, parallela D C, secans G T, in puncto Q. Dico Q, esse centrum grauitatis figuræ prædictæ. Quoniam enim C F, est dupla F D. Ergo ex schol. 1. proposit. 2. huius, F, erit centrum æquilibrij trianguli A D C, iuxta rectam D C, appensi. Pariter quoniam C E, est ad E D, vt numerus parabolæ auctus ternario, ad numerum parabolæ auctum vnitate; ergo ex schol. 2. eiusd. propos. erit E, centrum æquilibrij totius semiparabolæ acceptæ secundum rectitudinem D C. Cum ergo factum sit F E, ad E G, vt numerus parabolæ

bolæ

bolæ vnitate minutus ad numerum parabolæ vnitate auctum; & cum sit vt numerus parabolæ vnitate minutus, ad numerum parabolæ vnitate auctum, sic, ex conuerso scholij primi proposit. 1. primi libri, figura contenta à recta, & curua A C, ad triangulum A C R, seu D A C. Ergo vt F E, ad E G, sic reciproce figura A P C A, ad triangulum A D C. Ergo ex Archimede in prim æquipond. (quem necesse est lectorem ad sequentium intelligentiam peroptime callere) erit G, centrum æquilibrij figuræ A P C, acceptæ secundum D C. Ergo in G k, erit centrum grauitatis prædictæ figuræ. Eodem modo ostendetur L, esse centrum ęquilibrij trianguli A D C, secundum rectitudinem A D; & M, esse centrum æquilibrij semiparabolæ secundum eandem rectitudinem; & N, esse centrum æquilibrij figuræ A P C,

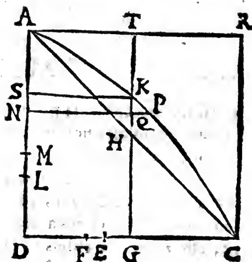
iuxta

iuxta eandem rectitudinem; ac proinde in NP, esse centrum grauitatis figuræ APC. Sed & in GK. Ergo in Q. Repertum est ergo,&c. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Sed ex dictis possumus deducere, excessum semiparabolæ supra triangulum sibi inscriptum, in nulla parabola esse parabolam eiusdem rationis cum tota, nisi in sola parabola quadratica. Quod enim sit vera parabola in quadratica, probatur ab Appollonio primo Conic. prop. 46. Quod vero in nulla alia sit, patet. Nam si talis esset, eius centrum grauitatis esset in linea secante AC, bifariam, quę esset eius diameter. Sed KH, in qua est eius centrum grauitatis, in nulla alia parabola à quadratica secat AC, bifariam. Ergo non erit vera parabola. Quod vero kH, non secet AC, bifariam, quilibet poterit experiri methodo, qua nos deinceps experiemur in parabola cubica. Experietur enim, quod quo magis progredimur versus parabolas altiorum potestatum, eo magis linea Gk, accedit ad CR, sed taliter vt semper CG, sit maior dimidia DG; quia solum in triangulo ARC, CG, est dimidia GD. Centra ergo ęquilibrij infinitarum figurarum APC, continentur omnia in linea, quę sit sexta pars DC, ordine quarta à D.

Modus autem patefaciendi GT, in nulla parabola à quadratica secare AC, bifariam, & experiendi,

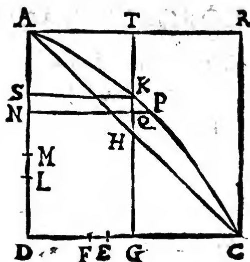


riendi, quę dicta sunt, sequens est in parabola cubica. Quoniam ex schol. 2. proposit. 2. huius, qualium CE, est 6, talium DE, est 4. Ergo qualium CE, est 9, talium DE, erit 6. Tota CD, 15. & DF, quę erat tertia pars DC, 5; FE, 1; & FC, 10. Cum autem parallelogrammum DR, sit sesquitertium semiparabolę; ipsa erit sesquialtera trianguli. Vnde diuidendo, figura APC, erit dimidia trianguli ADC. Et consequenter ex supradictis, quarum FE, est 1; talium EG, erit 2. Sed talium DF, erat 5, & tota DC, 15. Ergo talium DG, erit 8, & GC, 7. Eodem modo procedemus in alijs parabolis, in quibus semper inueniemus GT, magis accedere ad RC, vt dictum est. Sed cum talis methodus inueniendi tale centrum æquilibrij non contineat aliquam determinatam progressionem,

nem, ideo de tali methodo amplius verba non facimus.

SCHOLIVM II.

Si quis vero ſcire cupiat in qua proportione ſecetur kH, à centro grauitatis figurę APC, id ei licebit inuenire operando congruenter vt nos ſtatim faciemus in parabola cubica, in qua. Quoniam ducta Sk, parallela DC, eſt DA, ad AS, vt cubus DC, ad cubum Sk: cubus autem DC, quia DC, eſt 15, eſt 3375, & cubus DG, ſeù Sk, quia DG, eſt 8, vt dictum eſt, eſt 512. Ergo DA, ad AS, erit vt 3375. ad 512. Ergo per conuerſionem rationis, erit AD, ad DS, ſeù ad Gk, vt 3375. ad 2863. Verum in triangulo ADC, vt DC, ad CG, nempe vt 15. ad 7. ſic AD, ad HG. Ergo qualium AD, eſt 15, talium HG, erit 7. Ergo qualium AD, eſt 3375, talium GH, erit 1575. Sed talium erat tota Gk, 2863. Ergo talium erit KH, 1288. Pariter quoniam qualium AM, eſt 4, talium MD, eſt 3. Ergo qualium AM, eſt 12. talium MD, erit 9. & tota AD, 21. Sed talium & DL, eſt 7. Ergo DL, erit 7. LM, 2. MA, 12. in eadem menſura. Quoniam autem parallelogrammum eſt ſeſquitertium ſemiparabolæ, & ſemiparabola ſeſquialtera trianguli, & APC, ſubdupla trianguli, ſi N, ſit centrum ęquilibrij APC, quarum LM, erit 2, talium MN, erit 4. Ergo reliqua



liqua N A, erit 8, qualium tota D A, eſt 21. Ergo qualium D A, eſt 3375, talium A N, erit 1285, cum quindecim vigeſimisprimis. Sed talium A S, erat 512. Ergo talium reliqua S N, ſeù K Q, erit 773, cum 15. vigeſimisprimis. Talium autem erat tota k H, 1288. Ergo talium erit Q H, 518, cum 6. vigeſimisprimis. Eodem modo licet diſcurere in reliquis. Sed cum non contineant aliquam ſeriem, ideo omittuntur.

PROPOSITIO VIII.

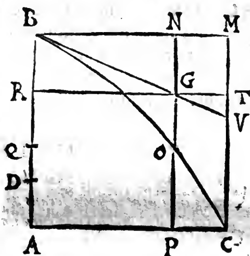
Cuiuslibet infinitorum trilineorum centrum grauitatis reperire.

ESto quodlibet trilineum BMC, cuius oporteat centrum grauitatis reperire. Sit ei circumscriptum parallelogrammum AM, & BM, sic diuidatur in N, vt BN, sit ad NM, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad vnitatem. Ergo N, erit centrum æquilibrij trilinei accepti secundum BM, ex schol. 1. proposit. 2. huius. Ducatur NOP, parallela BA. Ergo in ipsa erit centrum grauitatis trilinei BMC. Diameter BA, semiparabolæ diuidatur bifariam in Q, & in D, vt BD, sit ad DA, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ. Deinde fiat vt vnitas ad numerum parabolæ, sic DQ, ad QR, & per R, ducatur RGT, parallela AC, secans NP, in G. Dico G, esse centrum grauitatis trilinei BMC. Quoniam enim Q, est centrum æquilibrij parallelogrammi AM, accepti secundum AB, & D, est centrum æquilibrij semiparabolæ ABC, ex schol. 1. secundæ huius, & DQ, ad QR, facta est vt vnitas ad numerum parabolæ; nempe reciproce vt trilineum BMC, ad semiparabolam ABC. Ergo R, erit centrum æquilibrij trilinei BMC. Ergo in RT, erit centrum grauitatis talis trilinei. Sed & in NP. Ergo in puncto

cto G. Repertum est ergo centrum grauitatis prædicti trilinei. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Ex dictis facile possumus deducere, centrum æquilibrij trilinei BMC, accepti secundum AB, seù CM, sic secare v. g. CM, in T, vt CT, sit ad TM, vt triplus numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ vnitate auctum.



Quoniam enim BD, est ad DA, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ; nempe vt duplus numerus parabolæ binario auctus, ad duplum numerum parabolæ. Ergo qualium BA, est quadruplus numerus parabolæ binario auctus, & talium AD, duplus numerus parabolæ, & BQ, seù AQ, duplus numerus vnitate auctus, DQ, erit vnitas. Sed cum qualium DQ, est vnitas talium QR, sit numerus parabolæ. Ergo talium reliqua BR, erit numerus parabolę vnitate auctus, & AR, triplus numerus parabolę vnitate auctus. AR, ergo erit ad RB, seù

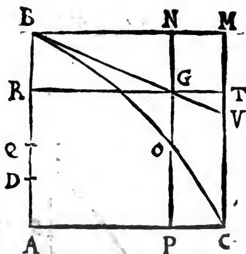
 CT, ad

C T, ad TM, vt triplus numerus parabolę vnitate auctus, ad numerum parabolę vnitate auctum. Ex quibus potest esse corollarium quartum ad proposit. 4. huius, quod si trilineum BMC, rotetur prius circa AC, postea circa BM: solidum ex trilineo circa AC, erit ad solidum ex trilineo BMC, circa BM, vt triplus numerus parabolę vnitate auctus, ad numerum parabolę vnitate auctum. V.g. in primo trilineo vt 4. ad 2. In secundo vt 7. ad 3. In tertio vt 10. ad 4. & sic in infinitum.

PROPOSITIO IX.

Si per centrum grauitatis cuiuslibet trilinei, & per verticem ipsius ducatur linea secans basim. Hæc eam taliter secabit, vt pars ad curuam, sit ad reliquam ad diametrum vt triplus numerus trilinei ad numerum trilinei auctum binario.

ESto trilineum vt in antecedenti propositione, & per B, & G, ducatur BGV, secans basim MC, in V. Dico CV, esse ad VM, vt triplus numerus trilinei, ad numerum trilinei binario auctum. Nempe in primo vt 3. ad 3. In secundo vt 6. ad 4. In tertio vt 9. ad 5. & sic in infinitum. Quoniam enim triangulum BRG, ad verticem est simile triangulo TGV. Ergo BR, seù MT, erit ad TV, vt RG, ad GT; seù vt BN, ad NM; nempe vt numerus para-



parabolæ, ſeù trilinei vnitate auctus ad vnitatem. Sed ex ſcholio anteced. CT, eſt ad TM, vt triplus numerus trilinei vnitate auctus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Ergo qualium CT, eſt triplus numerus trilinei vnitate auctus, & MT, numerus trilinei vnitate auctus, TV, erit vnitas. Ergo reliqua CV, erit triplus numerus trilinei, & MV, erit numerus trilinei binario auctus. Quod erat oſtendendum.

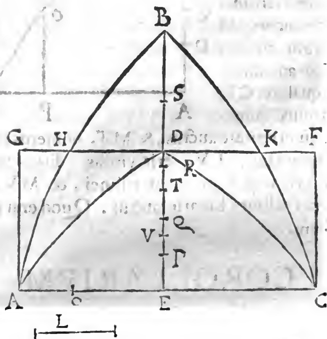
COROLLARIVM.

Ergo in trilineo quadratico, CV, erit ſeſquialtera VM. Ex quibus conſtat, propoſitionem 21. Lucæ Valerij lib. 3. de cent. graui: ſol. in qua hoc demonſtrat, eſſe noſtræ corollarium; ſicuti eſt corollarium præſentis, & 6. huius propoſitio 13. Archimedis 1. Æquipon. & omnium illorum, qui probant centrum grauitatis trianguli eſſe in linea, quæ ducta à vertice ſecat baſim bifariam.

PRO-

PROPOSITIO X.

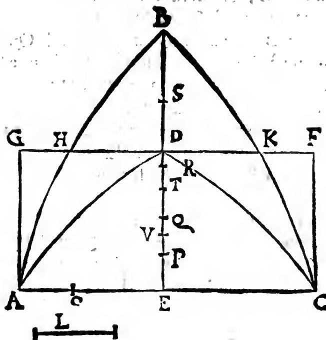
Frusti cuiuscumque parabolæ contenti duabus lineis basi parallelis, centrum grauitatis assignare.



ESto quælibet parabola ABC, in qua sit ducta Hk, basi parallela. Oporteat assignare centrum grauitatis frusti AHKC. Secetur BE, in Q. vt BQ, sit ad QE, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ; in tali ratione diuidantur DE, in P, & BD, in S; deinde super

per basi AC, & circa diametrum DE, concipiatur parabola ADC, eiusdem gradus cum ABC; fiatque vt BD, ad DE, sic SD, ad QR, auferendam à QS, incipiendo à Q; deinde fiat vt AO, quæ sit differentia inter AE, HD, ad HD, sic SR, ad RT. Tandem ratio AE, ad HD, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat vnitate numerum parabolæ, & sit L, vltimus terminus; TP, autem sic secetur in V, vt PV, sit ad VT, vt L, ad reliquas proportionales. Dico V, esse centrum grauitatis, frusti AHkC. Quoniam enim BE, diuisa fuit in Q, vt BQ, sit ad QE, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. Ergo ex schol. 1. proposit. 2. huius, Q, erit centrum grauitatis parabolæ ABC. Eodem modo patebit S, & P, esse centra grauitatis parabolarum HBK, ADC. Verum quoniam eadem pars est tota EQ, totius EB, sicuti pars EP, partis ED; ergo & reliqua PQ, erit eadem pars reliquæ DB, sicuti tota EQ, totius EB. Sed & qualis pars erit EQ, ipsius EB, talis pars est etiam DS, eiusdem DB. Ergo duæ PQ, DS, erunt æquales. At quoniam ex prop. 4. lib. primi, vt BE, ad ED, sic parabola ABC, ad parabolam ADC. Ergo & diuidendo, vt BD, ad DE, sic ABCD, ad parabolam ADC. Sed vt BD, ad DE, sic ex constructione, SD, seù ei æqualis PQ, ad QR. Ergo & vt PQ, ad QR, sic reciprocè figura ABCD, ad parabolam

ADC.



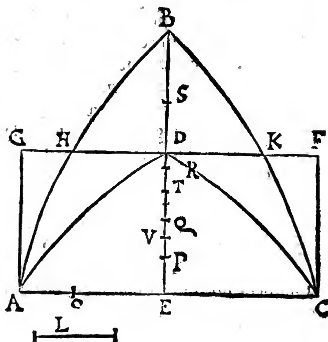
ADC. Sed, ex dictis, Q, est centrum grauitatis totius parabolæ ABC, P, parabolæ ADC. Ergo ex Archimede, R (vbicumque cadat) erit centrum grauitatis figuræ ABCD. Pariter quoniam ex proposit. 5. lib. 1. diuidendo, vt AO, ad HD, sic segmenta AHD, DkC, ad parabolam HBk; & supra factum est vt AO, ad HD, sic SR, ad RT. Ergo vt SR, ad RT, sic reciprocè segmenta AHD, DkC, ad parabolam HBK. At R, est centrum figuræ ABCD, S, parabolæ HBk. Ergo ex Archimede, T, erit centrum segmentorum AHD, DKC, simul sumptorum. At quoniam ex corollar.

pre-

proposit. 8. lib. prim. talia segmenta sunt ad parabolam ADC, vt vltima proportionalium inuenta L, ad summam reliquarum; & vt talis proportionalis ad talem summam sic facta est PV, ad VT. Ergo vt PV, ad VT, sic talia segmenta ad ADC. Ergo conuertendo, erit reciproce vt TV, ad VP, sic parabola ADC, ad segmenta AHD, DkC. Verum T, est centrum segmentorum; P, parabolæ ADC. Ergo V, erit centrum totius frusti AHKC.

SCHOLIVM I.

Ex supradicta nostra methodo vniuersali inueniendi centrum grauitatis omnium segmentorum parabolarum inclusorum inter duas lineas basi parallelas, potest deduci id, quod particulariter Archim. lib. 1. Æquip. proposit. 15. & alij ostendunt. Nempe V, centrum grauitatis trapezij AHkC, cuius opposita latera AC, Hk, sunt parallela sic diuidere TP, mediam tertiam partem DF, vt TV, sit ad VP, vt AF, ad HD: & vt dupla AE, cum HD, ad duplam HD, cum AE, sic DV, ad VE. Quod vero res sic se habeat statim patebit. Quoniam enim in trapezio, PE, est tertia pars DE, quia ADC, est triangulum, & QP, ex ostensis, æquatur SD, quæ est tertia pars BD, & BS, est duæ tertiæ partes eiusdem BD; ergo SQ, æqualis DP, erit duæ tertiæ partes DE. Cum ve-



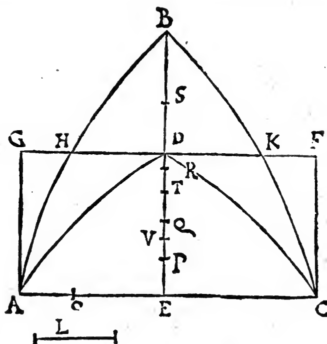
ro QR, sit tertia pars eiusdem DE (quia factum est vt BD, ad DE, sic SD, tertia pars BD, ad QR). Ergo SR, erit tertia pars DE. Item cum factum sit vt AO, ad HD, nempe vt ED, ad DB, sic SR, nempe tertia pars DE, ad RT. Ergo RT, erit tertia pars BD; nempe ęqualis SD. Tunc punctum R, vel cadit in D, vel supra, vel infra, sed semper supra T, vt clare patet. Si cadit in D (Quod tunc accidit quando punctum D, secat bifariam BE) cum TR, æquetur SD; erit TD, tertia pars DE. Si vero cadit supra (quod accidit quando ED, est maior DB) quoniam TR, est æqualis SD; com-

muni

muni ablata R D, (supponitur enim R, supra D, licet sculptor non expręsserit) remanet S R, tertia pars D E, æqualis D T. Si vero tandem R, cadit inter T, D, (nempe quando BD, est maior D E). Tunc, quoniam T R, æquatur SD; communi addita D R. Ergo TD, æquabitur S R; nempe tertiæ parti D E. Patet ergo semper D T, esse tertiam partem D E: sed etiam, per nostram regulam, T P, quæ est tertia pars DE, sic diuiditur in A, vt T V, sit ad V P, vt A E, ad H D. Ergo statim ad modum, quo facit Archimedes, concludemus esse DV, ad V E, vt dupla A E, cum H D, ad duplam H D, cum A E. Quare &c.

SCHOLIVM II.

Sed ex superioribus propositionibus quam plurima possumus assignare. Nam primo circumscripto segmento A H k C, parallelogrammo GC, reuolutoque hoc cum segmento vel circa A C, vel circa H k; possumus assignare rationem cylindri ex G C, ad solidum ex segmento AHkC, reuoluto vel circa AC, vel circa HK. Nam ex conuerso secundæ partis proposit. 8. p. habemus rationem parallelogrammi ad segmentum; & ex hac habemus rationem DV, ad V E, & consequenter dimidiæ D E, ad alterutram ipsarum DV, VE. Ex quibus rationibus componitur, ex schol. prim. proposit. 3. huius, ratio cylindri ex GC, ad alterutrum solidorum rotundorum



ex ſegmento circa AC, vel Hk.

Ratio ergo cylindri ex GC, ad alterutrum ſolidorum ex AHkC, ſiue circa AC, ſiue circa Hk, componetur ex ratione dimidiæ DE, ad alterutram ipſarum DV, VE, & ex ratione magnitudinis, quæ ad AE, HD, & cæteras tot proportionales quotus eſt numerus parabolæ ſe habeat vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ, ad AE, HD, & cæteras tot proportionales quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus.

Quod ſi AHKC, ſit primum ſegmentum, nempe

nempe trapezium ordinarium. Erit cylindrus ex G C, ad alterutrum solidorum ex trapezio, vt quadratum A E, simul cum rectangulo A E, H D, ad rectangulum A E, H D, vna cum tertia parte quadrati vel A E, vel H D, circa quam fit reuolutio, & cum subsesquialtero quadrati A E, vel H D, circa quam non fit reuolutio. Quod sic patebit. Nam ratio cylindri ex G C, ad solidum ex trapezio v. g. circa A C, componitur ex ratione duplæ A E, ad A E, H D, ex 8. pri. huius, & ex ratione, dimidiæ D E, ad E V. Verum, vt dimidia D E, ad E V, sic sesquialtera A E, cum sesquialtera H D, ad duplam H D, cum A E. (Cum enim ex schol. anteced. sit vt D V, ad V E, sic dupla A E, cum H D, ad duplam H D, cum A E. Ergo & componendo, erit vt tripla A E, cum tripla H D, ad duplam H D, cum A E, sic D E, ad E V. Et antecedentium dimidia. Ergo vt sesquialtera A E, cum sesquialtera H D, ad duplam H D, cum A E, sic dimidia D E, ad E V.) Ergo ratio cylindri ad solidum ex trapezio circa A C, componetur quoque ex rationibus duplæ A E, ad A E, H D, & sesquialteræ compositæ ex A E, H D, ad duplam H D, cum A E. Sed ex istis rationibus componitur quoque ratio rectanguli sub dupla A E, in illam sesquialteram; nempe rectanguli ei æqualis, sub A E, in triplam A E, & in triplam H D, ad rectangulum sub composita ex A E, H D, in duplam H D, & in A E. Ergo cylindrus erit ad illud solidum vt rectan-

rectangulum sub AE, in triplam AE, & in triplam HD; nempe vt triplum quadratum AE; cum triplo rectangulo AE, HD, ad rectangulum sub composita ex AE, HD, in duplam HD, cum AE; nempe ad triplum rectangulum AE, HD, cum duplo quadrato HD, & cum quadrato AE. Ergo & cylindrus erit ad solidum vt tertiæ partes horum planorum ad inuicem; nempe vt quadratum AE, cum rectangulo AE, HD, ad rectangulum AE, HD, cum tertia parte quadrati AE, & cum tertia parte duorum quadratorum HD (nempe cum subsesquialtero quadrati HD.) Eodem modo ostendetur cylindrum esse ad solidum ex trapezio circa Hk, in præfata ratione.

Secundo si concipiamus tam super parallelogrammo, quam super segmento cylindricos rectos æquealtos sectos plano transeunte per AC, & per latus oppositum ipsi GF; habebimus cubationem vtrorumque truncorum. Nam ex schol. 3. proposit. 10. sec. huius. prisma, quod est dimidium cylindrici super parallelogrammo, est ad alterutrum truncorum cylindrici super segmento, vt cylindrus ex parallelogrammo GC, circa AC, vel GF, ad alterutrum solidorum ex segmento circa AC, vel GF.

Tertio ex proposit. 4. huius, habemus rationem solidi ex segmento circa HK, ad solidum ex eodem segmento circa AC. Imo particularius in trapezio habemus, quod solidum ex trapezio AHkC, circa

circa HK, ad solidum ex eodem trapezio circa AC, erit vt dupla AE, cum HD, ad duplam HD, cum AE.

SCHOLIVM III.

Segmenti AHKC, inuentum est V, centrum grauitatis modo explicato, vt simul explicaremus ea, quæ explicata sunt; cæterum tale centrum compendiosius potest reperiri, inueniendo, vt factum est, S, & G, centra grauitatis parabolarum ABC, HBk: deinde rationem AE, ad HD, continuando in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ binario, adeo vt vltimus minimus terminus sit L: tandem faciendo vt excessus AE, supra L, ad L, sic SQ, ad QV. V, enim erit centrum quæsitum. Nam vt excessus AE, supra L, ad L; nempe ex schol. 2. proposit. 3. lib. prim. diuidendo, vt segmentum AHkC, ad HBk, sic reciprocè SQ, ad QV. Ergo ex Archim. V, est centrum quæsitum.

PROPOSITIO XI.

Segmenti cuiuscumque semiparabolæ contenti duabus lineis basi parallelis, centrum æquilibrij in basi assignare.

PRO-

ESto quodlibet ſegmentum cuiuſcumque ſemiparabolæ ABCD, adeo vt BC, AD, ſint baſi parallelæ; BA, ſit diameter ſegmenti, & AD, ſit maior BC. Oportet in AD, reperire centrum æquilibrij ſegmenti ABCD. Compleatur ſemiparabola AED, & tam DA, quam CB, diuidantur in F, & G, vt tam DF, ad FA, quam CG, ad GB, ſint vt numerus parabolæ ternario auctus ad numerum parabolæ auctum vnitate; & per punctum G, ducatur GH, parallela EA; ratio DA, ad BC, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ binario, & ſit vltimus terminus L; & fiat vt differentia inter DA, & L, ad L, ſic HF, ad FO. Dico O, eſſe centrum æquilibrij ſegmenti ABCD, accepti ſecundum AD; ſeù eſſe centrum grauitatis duplicati ſegmenti ABCD, ad partes AD. Quoniam enim, tam DA, quam BC, ſectæ ſunt in punctis F, & G, ſic vt tam DF, ad FA, quam CG, ad GB, ſint vt numerus parabolæ ternario auctus ad numerum parabolæ vnitate auctum; ergo ex ſchol. 2. propoſit. 2. huius, F, & G, erunt centra æquilibrij ſemiparabolarum AED, BEC. Ergo & H, erit centrum æquilibrij ſemiparabolæ BEC: idem enim eſt ſiue ſuſpendatur ex G, ſiue ex H. Verum quoniam ex propoſit. 3. primi, ſemiparabola AED, eſt ad ſemiparabolam BEC, vt poteſtas AD, vno gradu altior poteſtate parabolæ, ad ſimilem poteſtatem B; nempe, vt AD, ad L. Ergo & diuidendo, erit exceſſus

cessus DA, supra L, seù HF, ad FO, reciprocè vt segmentum ABCD, ad semiparabolam BEC. Quare ex Archimede, O, erit centrum æquilibrij segmenti ABCD. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM I.

Si quis vero cupiat inuenire centrum grauitatis segmenti ABCD; per proposit. anteced. inueniat M, centrum æquilibrij segmenti accepti secundum BA; & per puncta M, & O, actis MP, ON, parallelis AD, EA, sè decussantibus in Q. Patet Q, esse centrum grauitatis segmenti.

SCHOLIVM II.

Sed etiam in hac propositione, ex superius dictis, tria faciliter possumus assignare. Nam segmento circumscripto parallelogrammo AR; & reuoluto ipso cum segmento siue circa BA, siue circa RD: habebimus rationem cylindri ex parallelogrammo ad alterutrum solidorum ex segmento. Nam ex proposit. 8. p. habemus rationem parallelogrammi AR, ad ipsum segmentum. Quæ autem sit talis ratio, recolenti schol. 2. anteced. proposit. patebit.

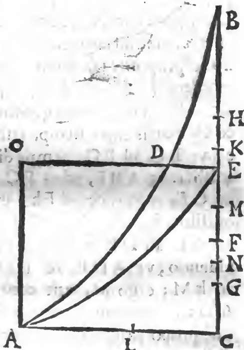
Secundo, si tam super parallelogrammo, quam super segmento concipiamus cylindricos rectos æquealtos sectos diagonaliter plano transeunte per AB, & per latus oppositum DR: habebimus cubationem amborum truncorum cylindrici super segmento. Ratio autem huius asserti recolenti superiora facile innotescet.

Tertio dabitur ratio solidi rotundi ex segmento reuoluto circa RD, ad solidum ex eodem segmento reuoluto circa BA.

PRO-

PROPOSITIO XII.

Cuiuslibet trapezij centrum æquilibrij inuenire in diametro.



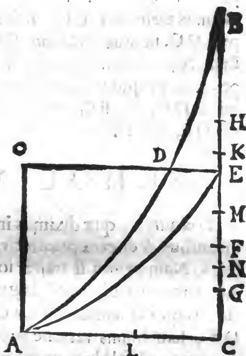
SIt quodlibet ex infinitis trilineis, cuius trapezium resectum DE, basi AC, parallela, sit ADEC; & oporteat huiusmodi trapezij cētrum æquilibrij in diametro EC, reperire. Super basi AC, & circa diametrum EC, concipiatur trilineum AEC, eiusdem generis cum ABC; diuidaturque BC, in F, EC, in G, & BE, in H, sic vt BF, ad FC; BH, ad HE; & EG, ad GC, sint vt numerus trilinei vnitate auctus, ad vnitatem. Ergo ex schol. 2. proposit. 2 huius, F, G, & H, erunt centra equilibrij trilineorum ABC, DBE, AEC, secundum BC. Postea fiat vt BE, ad EC, sic HE, ad

 FK,

FK, auferrendam ab FH, incipiendo ab F. Deinde fiat vt AL, excessus AC, supra DE, ad DE, sic Hk, ad FM. Tandem MG, sic secetur in N, vbicumque cadat punctum N, vt GN, sit ad NM, vt tot continuè proportionales in ratione CB, ad BE, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, prima maiori excepta, nempe CB, ad ipsam CB. Dico punctum N, esse centrum quæsitum. Huius asserti demonstratio est fere eadem cum demonstratione proposit. 10. huius. Nam eodem modo demonstrabimus GF, EH, æquales esse. Item quoniam F, est centrum æquilibrij totius trilinei ABC, & G, partis eius; nempe trilinei AEC, & factum est vt BE, ad EC; nempe diuidendo, ex proposit. 4. lib. 1. vt ABE, ad AEC, sic HE, seu ei æqualis GF, reciproce, ad Fk; ergo k, erit centrum æquilibrij figuræ ABE. Pariter quoniam factum est vt AL, ad DE; nempe ex proposit. 6. prim. lib. diuidendo, vt ADE, ad BDE, sic reciproce Hk, ad kM; ergo M, erit centrum æquilibrij figuræ ADE. Tandem, quoniam factum est vt tot continuè proportionales in ratione CB, ad BE (ipsa CB, excepta) quarum numerus excedat numerum trilinei vnitate, ad ipsam CB; nempe ex corol. proposit. 9 lib. pri. vt ADE, ad AEC, sic GN, ad NM; ergo N, erit centrum æquilibrij trapezij ADEC; & consequenter grauitatis eiusdem trapezij duplicati ad partes CE. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM I.



Cum in ſerie infinitorum trapeziorum ſit primum trapezium, quod eſt idem cum dimidio primi ſegmenti parabolici propoſit. 10. huius; & cum hæ methodi inueniendi centra grauitatis, ſeù æquilibrij primi trapezij, & primi ſegmenti parabolici conueniant, ac ſint vnum,& idem, vt experienti vtraſque methodos patebit; ſequitur, quod cum in ſchol. 1. propoſit. 10. oſtenſum ſit methodum illam conuenire cum methodo Archimedis, & aliorum, qui reperierunt centrum grauitatis trapezij, etiam præſens cum illa conueniat.

SCHOLIVM II.

Sed etiam trapezij ADEC, licet centrum æquilibrij

librij compendiosius reperire. Inuentis enim H, & F, centris trilineorum ABC, DBE, & ratione CB, ad BE, continuata in tot terminos vt numerus eorum excedat numerum trilinei binario, sitque vltimus terminus CG; si fiat vt excessus CB, supra CG, nempe BG, ad GC, sic HF, ad FN. Erit N, centrum quæsitum. Est enim ex schol. pri. & 2. proposit. 3. lib. prim. diuidendo ADEC, ad BDE, vt BG, ad GC; nempe reciprocè vt HF, ad FN.

SCHOLIVM III.

Tria autem, quæ diximus in superioribus propositionibus deduci ex prædictis, deducentur etiam in hac. Nam primo si trapezio ADEC, intelligamus circumscribi parallelogrammum OC, quod cum trapezio voluatur siue circa AC, siue circa DE, habebimus rationem cylindri ex parallelogrammo, ad solidum ex trapezio. Nam ex proposit. 9. pri lib. habemus rationem talis parallelogrammi ad trapezium.

Ratio ergo cylindri ex OC, ad solidum ex trapezio reuoluto siue circa CA, siue circa OE, erit eadem cum ratione rectanguli contenti sub dimidia EC, & sub tot CB, quotus est numerus trilinei vnitate auctus, ad rectangulum sub altera ipsarum EN, NC, secundum quod fit reuolutio, & sub CB, BE, & cæteris tot proportionalibus, quotus

est

est numerus trilinei vnitate auctus.

Deducitur secundo, quod si tam super parallelogranimo, quam super trapezio intelligantur cylindrici æquealti secti diagonaliter plano transeunte per A C, & per latus oppositum ipsi DE, habebimus cubationes vtrorumque truncorum cylindrici super trapezio.

Deducitur tertio dari rationem solidi rotundi ex trapezio circa AC, ad solidum rotundum ex eodem trapezio circa DE.

PROPOSITIO XIII.

Trapezij cuiuscumque, centrum æquilibrij in basi assignare.

ESto trapezium quodcumque ABCD; & oporteat eius centrum æquilibrij in basi AD, reperire. Compleatur trilineum AED, cuius ipsum est trapezium; & tam AD, quam BC, sic diuidantur in F, & G, vt tam AF, ad FD, quam BG, ad GC, sit vt triplus numerus trilinei vnitate auctus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Ergo ex schol. proposit. 8. huius: tam F, quam G, erunt centra æquilibrij trilineorum BEC, AED: & si ipsi CG, fiat æqualis DH; etiam H, erit centrum æquilibrij trilinei BEC, appensi secundum AD. Ratio DE, ad EC, continuetur in tot terminos vt numerus eorum excedat numerum trilinei binario;

binario; sitque vltimus minimus terminus k. Ergo trilineum A E D, erit ad trilineum B E C, ex schol. 2. proposit. 3. lib. pri. vt D E, ad K. Et diuidendo, erit trapezium A B C D, ad trilineum BEC, vt excessus DE, supra K, ad k. Fiat ergo vt excessus D E, supra k, ad k, sic H F, ad F L. Dico punctum L, esse centrum æquilibrij trapezij secundum AD, appensi. Quod facile patet, quia cum F, & H, sint centra æquilibrij trilineorum A E D, BEC, & factum sit reciproce, vt excessus D E, supra k, ad k, nempe vt A B C D, ad B E C, sic H F, ad F L. Ergo L, erit requisitum centrum. Quod erat inueniendum.

SCHOLIVM I.

Si ergo per punctum L, ducatur L O, parallela D E, & per proposit. anteced. inueniatur M, centrum æquilibrij trapezij appensi secundum C D, & ducatur M N, parallela A D: N, erit centrum grauitatis prædicti trapezij.

Item si trapezio circumscribatur parallelogrammum P D, quod cum ipso reuoluatur circa C D, seù circa P A; ex dictis patet primo dari rationem cylindri ex P D, ad alterutrum solidorum ex trapezio siue circa C D, siue circa P A.

Patet secundo dari cubationes truncorum cylindrici super trapezio resecti plano transeunte per C D, & per latus oppositum ipsi P A.

Patet

Patet tertio dari rationem solidi ex trapezio circa DC, ad solidum ex trapezio circa PA.

PROPOSITIO XIV.

Minoris portionis cuiuscumque parabolæ resectæ linea diametro parallela, centrum æquilibrij in basi assignare.

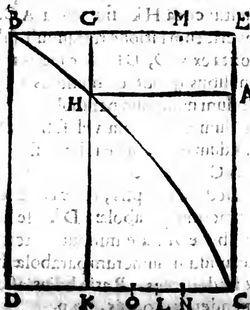
ESto quælibet semiparabola DBC, cuius minor portio sit KHC, adeo vt Hk, sit diametro BD, parallela, & oporteat portionis kHC, centrum æquilibrij in basi kC, reperire, hoc est centrum grauitatis portionis prædictæ duplicatæ ad

partes kC. Semiparabolæ circumſcribatur parallelogrammum DE; & KH, producatur vſque ad G; & diuidatur KC, bifariam in L; & ex propoſit. 12. huius, inueniatur M, centrum æquilibrij trapezij GHCB; & fiat CN, æqualis EM. Ducatur HA, parallela DC, & fiat vt differentia inter tot EB, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, & inter EB, BG, & cæteras tot continuè proportionales in harum ratione quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad has continuè proportionales, ſic NL, ad LO. Dico O, eſſe centrum æquilibrij portionis HkC. Cum enim L, ſit centrum æquilibrij parallelogrammi kE, & N, trapezij HGEC; & cum factum ſit NL, ad LO, vt exceſſus tot EB, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus ſupra EB, BG, & cæteras tot proportionales quot ſunt ipſæ, ad eaſdem proportionales; nempe ex ſecunda parte propoſit. 9. lib pri. conuertendo, & diuidendo, ſic reciprocè HkC, ad HGEC. Ergo ex Archim. O, erit centrum quæſitum. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Verum cum indigeamus, pro dicendis in ſequenti libro, centris æquilibrij talis portionis, & aliorum ſegmentorum in parabola quadratica; particularius explicabimus in ipſa & nunc, & in ſequentibus, regulas vniuerſales inueniendi talia centra æquilibrij.

In



In parabola ergo quadratica punctum, quod est centrum, est in basi K C, portionis, prius secta bifariam in L, & in N, secundum centrum grauitatis excessus parallelogrammi G C, supra portionem, in eo puncto, in quo L k, sic diuiditur, vt N L, sit ad N O, vt excessus triplæ C D, supra C D, D k, & harum tertiam minorem continuè proportionalem, ad has tres continuè proportionales.

SCHOLIVM II.

Si vero portioni circumscribatur parallelogrammum k A, tria colligentur. Primum est ratio cy-

lindri ex k A, ad ſolidum rotundum ex portione, ſiue reuoluantur circa Hk, ſiue circa AC. Hæc autem eadem erit cum ratione rectanguli ſub kL, & ſub compoſita ex CD, Dk, & cæteris tot continuè proportionalibus quotus eſt numerus parabolæ, accepta ſecundum numerum parabolę vnitate auctum, ad rectangulum contentum vel ſub kO, vel ſub OC, ſecundum quod fit reuolutio ſiue circa Hk, ſiue circa AC, & ſub compoſita ex ijſdem proportionalibus, ſed ſic acceptis, vt CD, accipiatur ſecundum numerum parabolæ; Dk, ſecundum numerum parabolæ vnitate minutum; tertia proportionalis, ſecundum numerum parabolæ binario minutum; & ſic deinceps. Ratio huius aſſerti principaliter dependet ex prop. 15. lib. p.

Imo ex ſcholio eiuſdem particularius colligitur in parabola quadratica, eſſe cylindrum ad illud ſolidum rotundum, vt rectangulum contentum ſub KL, vel LC, & ſub compoſita ex CD, Dk, ad rectangulum contentum ſub kO, vel OC, & ſub compoſita ex dimidijs CD, Dk, & ex ſexta parte kC.

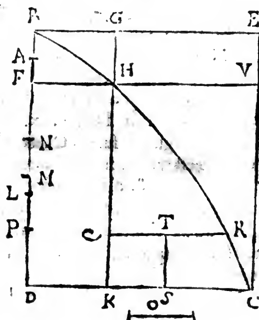
Secundum quod colligitur eſt, quod ſi ſuper portione concipiatur cylindricus rectus, ſectus diagonaliter plano tranſeunte per HK, & per latus oppoſitum ipſi AC, haberi cubationes vtrorumque truncorum.

Tertium eſt, haberi rationem ſolidi ex portione circa AC, ad ſolidum ex portione circa Hk.

PRO-

PROPOSITIO XV.

Eiusdem portionis centrum æquilibrij secundum lineam diametro parallelam assignare.



SEd oporteat eiusdem portionis HKC, centrum æquilibrij in HK, assignare. Ducatur per H, HF, DC, parallela; & BF, BD, secentur in A, L, vt BL, BA, sint ad LD, AF, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ. Ergo ex schol. p proposit. 2. huius, A, & L, erunt centra æquilibrij semiparabolarum FBH, DBC.

Pari-

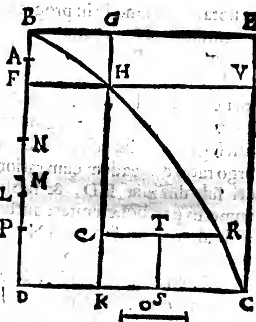
Pariter si FD, secetur bifariam in M, erit M, centrum æquilibrij parallelogrammi FK. Diuidatur AM, sic in N, vt AN, sit ad NM, vt tot DF, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad tot BF, quotus est numerus parabolæ; nempe ex proposit. 19. lib. pri. reciprocè vt parallelogrammum DH, ad semiparabolam FBH. Ergo N, erit centrum æquilibrij segmenti DBHK. Tunc ratio CD, ad DK, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate, & sit vltimus minimus terminus O; & fiat vt tot rectangula CDK, quotus est numerus parabolæ, vna cum rectangulo sub Dk, in excessum CD, supra O, ad rectangulum sub kC, & sub excessu tot CD, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus supra CD, DK, & alias proportionales repertas; nempe ex proposit. 20. lib. prim. vt segmentum DBHk, ad portionem KHC, sic NL, reciprocè, ad LP. Ergo P, erit centrum æquilibrij portionis HkC, acceptæ secundum DB. Si ergo fiat kQ, æqualis DP. Patet inuentum esse Q, centrum æquilibrij portionis HkC, acceptæ secundum kH. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM I.

Si ergo ducatur QR, parallela KC, & per S, centrum æquilibrij portionis KHC, appensæ, ex proposit. anteced. secundum KC, ducatur ST, paral-

parallela HK, occurrens QR, in T; patet T, esse centrum grauitatis prædictæ portionis.

SCHOLIVM II.



Sed insuper patet ad modum superiorum tria colligi. Primum est, ratio cylindri ex KV, ad alterutrum solidorum ex HkC, reuoluta cum kV, siue circa kC, siue circa HV.

Secundum est, cubatio truncorum cylindrici recti super portione, resecti plano transeunte diagonaliter per kC, & per latus oppositum ipsi HV.

Tertium est, ratio solidi ex portione circa HV, ad

ad solidum rotundum ex eadem portione circa k C, quod erit segmentum fusi parabolici.

SCHOLIVM III.

Imo licet notare, quomodo in progressu demonstrationis inuentum sit N, centrum æquilibrij segmenti ad diametrum DBHK. Quo centro inuento tria pariter licet colligere. Quorum primum, est ratio cylindri ex parallelogrammo DG, ad alterutrum solidorum rotundorum ex segmento reuoluto cum parallelogrammo siue circa BG, siue circa Dk. Talis ergo ratio erit eadem cum ratione rectanguli contenti sub dimidia BD, & sub tot CD, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad rectangulum sub alterutra ipsarum BN, ND, secundum quod fit reuolutio, & sub composita ex tot CD, quotus est numerus parabolæ, & ex excessu CD, supra O, vt clare colligitur ex proposit. 10. lib. prim. Sicuti ex schol. 1. eiusdem prop. colligitur particulariter in parabola quadratica, esse prædictum cylindrum, ad alterutrum prædictorum solidorum, vt rectangulum sub dimidia DB, & sub CD, ad rectangulum sub alterutra ipsarum BN, ND, & sub composita ex Ck, ex duabus tertijs partibus Dk, & ex tertia parte excessus Dk, supra O.

Imo ex schol. 2. eiusdem propositionis licet vniuersaliter colligere, prædictum cylindrum esse ad vnum,

B G E
A
F H V
N
M
L
P C T R
D K O S C

vnum, vel alterum ipsorum solidorum, vt rectangulum sub dimidia DB, & sub tot DB, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad rectangulum vel sub BN, vel sub ND, & sub composita ex tot BD, quotus est numerus parabolæ, & ex vnica FD. Ex quibus postea, & ex schol. 3. eiusd. proposit. licet particulariter colligere, cylindrum esse ad solidum ex segmento in parabola quadratica, vt dimidium quadrati BD, ad rectangulum sub BN, vel ND, & sub composita ex DF, & ex duabus tertijs partibus BF.

Secundum, quod colligitur, est cubatio truncorum cylindrici recti super segmento BHKD, resecti plano transeunte per DK, & per latus oppositum

 situm

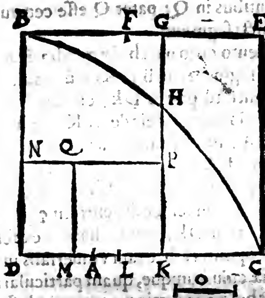
situm ipsi BG. Talis enim cubatio habetur omnibus modis, quibus in præsenti scholio explicata fuit ratio cylindri ad solida rotunda ex segmento correspondentia truncis.

Tertium demum, quod colligitur, est ratio solidi ex segmento circa BG, quod est pars annuli stricti secundum rectitudinem basis, ad solidum ex eodem segmento circa DK; quod est segmentum fusi parabolici.

PROPOSITIO XVI.

Segmenti semiparabolæ cuiuscumque ad diametrum, centrum æquilibrij in basi assignare.

VErum oporteat segmenti DBHk, centrum æquilibrij in basi Dk, assignare. Dk, secetur bifariam in A, & BG, sic secetur in F, vt BF, sit ad FG, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad vnitatem; & fiat kL, æqualis GF. Ergo tam F, quam L, erunt centra æquilibrij trilinei BGH, appensi secundum Dk, ex schol. pri. proposit. 2. huius. Vt ergo factum est in anteced. proposit. ratio CD, ad Dk, intelligatur continuata vsque ad O, adeo vt numerus proportionalium excedat numerum parabolæ vnitate; & fiat, vt excessus tot CD, quotus est numerus parabolæ, vnitate auctus supra O, ad O, sic LA, ad AM. Dico pun-



co punctum M, esse centrum æquilibrij quæsitum. Nam A, est centrum totius parallelogrammi DG, & L, trilinei BGH: cum autem factum sit vt excessus tot DC, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus supra O, ad O, nempe ex proposit. 10. primi diuidendo, vt segmentum DBHK, ad trilineum BGH, sic reciprocè LA, ad AM. Patet M, esse centrum æquilibrij segmenti BHkD. Quod &c.

SCHOLIVM I.

Si ergo inuento N, centro æquilibrij segmenti,

 ducan-

ducantur NP, MQ, parallelæ DC, BD, simul conuenientibus in Q; patet Q, esse centrum grauitatis prædicti segmenti.

In segmento ergo parabolæ quadraticæ, centrum æquilibrij segmenti DBHK, seù grauitatis duplicati segmenti ad partes Dk, est in basi Dk, prius bifariam secta in A; deinde AK, bifariam in L; tandem DA, in M, tali puncto, in quo DA, sic diuiditur, vt LA, quarta pars Dk, sit ad AM, vt dupla CD, cum excessu CD, supra O, ad O.

Sed alia ratio inueniendi centrum æquilibrij prædicti segmenti in Dk, potest haberi ex schol. 2. & 3. citatę proposit. & hęc tam vniuersalis in segmentis parabolæ cuiuscumque, quam particularis in segmento parabolæ quadraticæ, quæ ex industria relinquitur diligentiæ lectoris.

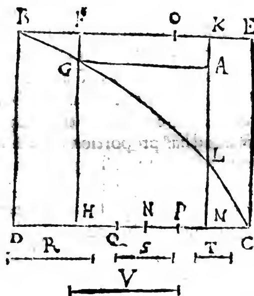
SCHOLIVM II.

Imo ad modum superiorum etiam nunc licet tria colligere. Nempe ratio cylindri ex DG, ad solida ex segmento reuoluto tam circa Hk, quam circa BD. Cubatio truncorum cylindrici recti super segmento, resecti plano diagonaliter transeunte per BD, & per latus oppositum ipsi HK. Et ratio solidi ex segmento reuoluto circa DB, ad solidum ex eodem segmento reuoluto circa HK.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

Segmenti intermedij ſemiparabolæ cuiuſcumque reſectæ duabus lineis diametro parallelis, centrum æquilibrij in baſi aſsignare.

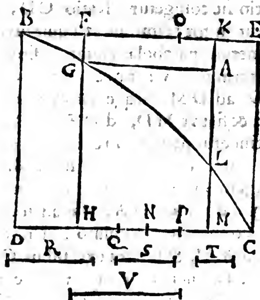


SEd ſemiparabolæ DBC, ſecetur GH, LM, diametro BD, parallelis, & oporteat ſegmenti HGLM, centrum æquilibrij in baſi HM, reperire. Semiparabolæ, cuius eſt ſegmentum, intelligatur circumſcriptum parallelogrammum DE; & HG, ML, intelligantur produci vſque ad F, K: HM, autem ſecetur bifariam in N, & ex pro-

proposit. 12. huius, inueniatur in Fk, O, centrum æquilibrij trapezij GFKL; & ipsi KO, fiat æqualis MP. Iam patet N, P, esse centra æquilibrij, N, quidem parallelogrammi Hk, P, vero trapezij GFKL, secundum HM, appensorum. Tunc ratio CD, ad DM, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate, sitque vltimus minimus terminus R: fiat autem vt MD, ad DH, sic R, ad S; quæ ratio continuetur in tot terminos, vt numerus eorum itidem excedat numerum parabolæ vnitate; sitque vltimus minimus terminus T. Fiat vero, vt excessus tot DC, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus supra R, O, & cæteras tot proportionales quot sunt ipsæ, ad has proportionales, sic PN, ad NQ. Dico punctum Q, esse quæsitum centrum. Nam ex proposit. 12. lib. pri. est diuidendo, & conuertendo, vt prædictus excessus ad prædictas proportionales; nempe vt PN, ad NQ, sic reciprocè segmentum HGLM, ad trapezium GFkL. Quare patet propositum.

SCHOLIVM I.

In segmento ergo parabolæ quadraticæ, centrum æquilibrij, erit in HM, prius secta bifariam in N; deinde secta NM, in P, secundum centrum æquilibrij trapezij FGLk; & in dimidia HN, & in eiusdem tali puncto Q, vt PN, sit ad NQ, vt excessus



cessus triplæ CD, supra tres R, S, T, ad ipsas. Vel ex schol. 2. præcit. proposit. possumus inferre, esse in Q, sic, vt PN, sit ad NQ, vt rectangula DCM, DMC, DHM, cum duobus tertijs quadrati HM, ad rectangulum MDH, cum tertia parte quadrati HM. Hoc autem lector ex schol. citato, facile proprio Marte eliciet.

SCHOLIVM II.

Tria autem solita etiam in hac propositione licet colligere. Primum est, circumscripto segmento parallelogrammo HA, ratio cylindri ex parallelogrammo, ad alterutrum solidorum ex segmento reuo-

reuoluto tam circa HG, quam circa ML. Hæc autem ratio sic colligetur. Ratio CD, ad DH, continuetur in tot terminos vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate, sitque vltimus minimus terminus V: Eodem modo continuetur ratio CD, ad DM; sitque vltimus minimus terminus R; & fiat vt MD, ad DH, sic R, ad S: quæ ratio continuetur pariter in tot terminos T, &c. vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate. Colligetur ergo, his peractis, ex proposit. 18. lib. pri. cylindrum ex HA, esse ad solida ex segmento modo antedicto reuoluto, vt rectangulum sub dimidia MH, & sub tot excessibus CD, supra V, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad rectangulum, vel sub MQ, vel sub HQ, & sub excessu tot CD, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, supra R, S, & cæteras tot numero proportionales.

Secundum, quod colligitur, est solita cubatio truncorum cylindrici recti super segmento, resecti plano transeunte per HG, & per latus oppositum ipsi ML.

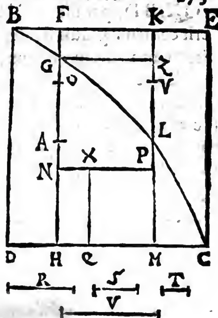
Tertium est ratio solidi ex segmento circa GH, ad solidum ex eodem segmento circa ML.

PROPOSITIO XVIII.

Prædicti segmenti, in maiori linea diametro parallela centrum æquilibrij reperire.

Sed

SEd oporteat talis segmēti HGLM, inuenire centrum æquilibrij in GH. Secetur FH, in A, bifariam & ex prop. 13. huius. inueniatur in basi kL, V, centrum æquilibrij trapezij GFkL, & ipsi KV, fiat æqualis FO. Ergo A, erit centrum æquilibrij parallelogrammi Hk, & O, pariter erit centrum æquilibrij trapezij



GFkL, si ambo intelligantur appensa secundum FH. Fiat ergo vt excessus tot DC, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus (facta prius constructione proposit. anteced.) supra R, S, T, &c. sic OA, ad AN. N, erit centrum æquilibrij quæsitum. Ratio afferti est clarissima; quia OA, est ad AN, vt ille excessus ad illas proportionales; nempe reciproce, vt HGLM, ad GFkL. Quare &c.

SCHOLIVM.

Si ergo ducatur NP, parallela DC, & per Q, centrum æquilibrij eiusdem segmenti in basi duca-

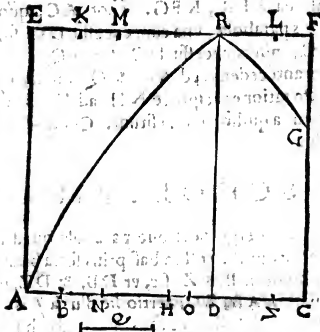
tur QX, BD, parallela, NP, in X, occurrens. X erit centrum grauitatis segmenti.

Segmento autem circumscripto parallelogrammo HZ, concludentur tria solita. Nempe ratio cylindri ex parallelogrammo ad solida ex segmento siue circa HM, siue circa GZ. Cubatio truncorum cylindrici recti super segmento, resecti plano transeunte per HM, & per latus oppositum ipsi GZ. Et ratio solidi ex segmento circa HM, ad solidum ex eodem segmento circa GZ.

PROPOSITIO XIX.

Portionis maioris parabolæ cuiuscumque resectæ linea diametro parallela, centrum æquilibrij in basi assignare.

ESto quælibet portio maior ARGC, parabolæ cuiuscumque, resectæ CG, diametro RD, parallela, & oporteat eius centrum æquilibrij in AC, basi adinuenire. Portioni ipsi circumscribatur parallelogrammum EC, & AC, secetur bifariam in H. Erit ergo punctum H, centrum æquilibrij parallelogramni EC. Iterum secentur RF, RF, in k, & L, sic vt Rk, ad kE, & RL, ad LF, sint vt numerus parabolæ vnitate auctus ad vnitatem. Ergo ex schol. pri. proposit. 2. huius. k, & L, erunt centra æquilibrij trilineorum AER, RFG. Cum ergo ex schol. pri. proposit. 3. lib. pri. sit



sit trilineum R E A, ad trilineum R F G, vt potestas E R, vno gradu altior potestate parabolæ, ad similem potestatem F, si k L, taliter secetur in M, vt L M, sit ad M k, vt reciprocè potestas E R, vno gradu altior potestate parabolæ, ad similem potestatem R F: ex Archim. sæpe citato, M, erit centrum æquilibrij duorum trilineorum simul vnitorum: & si A N, fiat ęqualis EM; etiam N, erit centrum ęquilibrij talium trilineorum secundum A C, appensorum. Fiat ergo vt dictum est; & ratio A D, ad D C, continuetur in tot terminos vt numerus eorum excedat numerum parabolæ binario, & sit vltimus minimus terminus Q. Cum ergo ex proposit. 13. lib.

prim. diuidendo, & conuertendo, fit portio ARGC, ad trilinea AER, RFG, vt tot AC, quotus est numerus parabolæ, vna cum excessu DC, supra Q, ad AC, minus excessu DC, supra Q; nempe vt dictum antecedens, ad AD, & Q. simul; si fiat in prædicta ratione reciprocè NH, ad HO. Erit O, centrum æquilibrij quæsitum. Quod erat inueniendum.

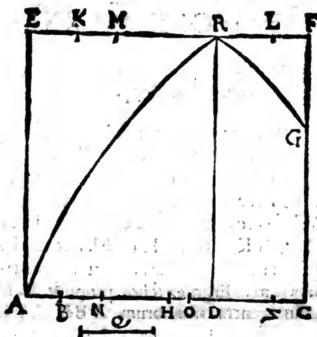
SCHOLIVM I.

In maiori ergo portione parabolæ quadraticæ, centrum æquilibrij est in basi prius secta bifariam in H, & deinde in B, & Z, sic, vt DB, & DZ, sint triplæ ipsarum AB, ZC; tertio sic diuisa ZB, in N, vt ZN, sit ad NB, vt cubus AD, ad cubum DC, seu vt AD, ad Q, quartam proportionalem ipsarum AD, DC; tandem in N, & in eiusdem puncto O, taliter constituto, vt NH, sit ad HO, vt dupla AC, cum differentia inter DC, & Q, ad AD, cum Q.

SCHOLIVM II.

Tria autem solita deduci ex similibus antecedentibus propositionibus elicientur pariter ex præsenti. Quorum primum est ratio cylindri ex parallelogrammo EC, ad solida ex portione, reuolutis ambobus tam circa AE, quam circa FC. Hæc

vero



vero ratio, est eadem cum ratione rectanguli, cuius vnum latus sit AH, aliud tot AC, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad rectangulum, cuius vnum latus sit altera ipsarum AO, OC, aliud composita ex AC, accepta secundum numerum parabolæ, & ex excessu DC, supra Q, vt elicitur ex præcitata prop. 13. p.

Secundum est cubatio truncorum cylindrici recti resecti plano diagonaliter transeunte per CF, & per latus oppositum ipsi AE. Tertium est ratio solidorum ex segmento ad inuicem reuoluto circa AE, CG.

PRO-

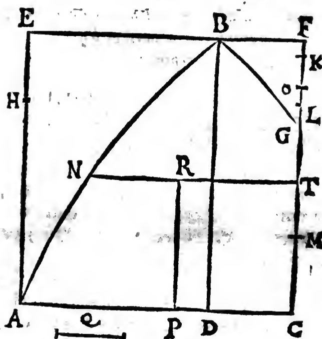
PROPOSITIO XX.

Prædictæ portionis centrum æquilibrij in linea diametro parallela reperire.

SEd oporteat prædictæ portionis centrum æquilibrij reperire in CG, parallela BD, etiam producta si opus sit. FC, diuidatur bifariam in T, adeo vt T, sit centrum æquilibrij parallelogrammi EC. AE, vero, & GF, sic secentur in H, & K, vt AH, GK, sint ad HE, Fk, vt triplus numerus trilinei vnitate auctus, ad numerum trilinei vnitate auctum. Ergo ex schol. proposit. 8. huius. H, & k, sunt centra trilineorum AEB, BFG, in basibus: & si fiat FL, æqualis EH, erit L, centrum æquilibrij trilinei AEB, appensi secundum FC. Quoniam autem trilineum AEB, est ad trilineum BFG, vt supra dictum est, vt AD, ad Q, si KL, sic diuidatur in O, vt sit vt AD, ad Q, sic reciprocè kO, ad OL. Ergo O, erit centrum æquilibrij amborum trilineorum simul coniunctorum, & ex O, appensorum. Cum vero etiam T, sit centrum æquilibrij totius parallelogrammi EC, sit fiat vt ABGC, ad trilinea, nempe in ratione dicta in superiori propositione, sic OT, ad TM. Patet M, esse centrum quæsitum. Quod &c.

SCHO-

SCHOLIVM.



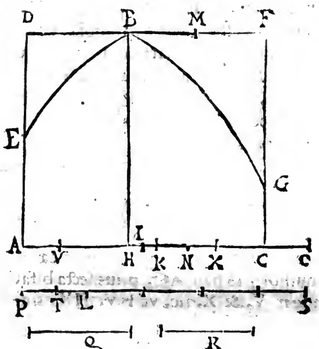
Ducta ergo TN, parallela AC, & per P, centrum æquilibrij segmenti in basi, ducta PR, parallela BD, occurrens NT, in R; patet R, esse centrum grauitatis prædicti segmenti. Tria autem ordinariè collecti in superioribus propositionibus, etiam nunc colligentur; quod indicasse lectori sufficiat.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Segmenti parabolæ cuiuſcumque reſectæ duabus lineis diametro parallelis includentibus diametrum, centrum æquilibrij in baſi reperire.

ESto qualibet parabola, quæ reſecta lineis A E, C G, diametro B H, parallelis, & ipſam intercipientibus, exhibeat ſegmentum A E B G C. Oportet talis ſegmenti centrum æquilibrij in baſi A C, reperire. Segmento circumſcribatur parallelogrammum D G, & A C, diuidatur bifariam in K, adeo vt k, ſit centrum æquilibrij parallelogrammi D C. Ad modum autem propoſitionis 19. inueniatur M, vel N, centrum æquilibrij trilineorum E D B, B F G, ſimul coniunctorum; ſit O H, baſis ſemiparabolæ, & fiat vt C H, ad H A, ſic O H, ad P L; & fiat vt vnitas ad numerum parabolæ, ſic P L, ad L S; ratio autem O H, ad H C, continuetur in tot terminos, quorum vltimus minimus ſit Q, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate, & in totidem terminos continuetur ratio O H, ad H A, ſitque vltimus minimus terminus R. Denuo fiat vt tot O H, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus ad exceſſum ipſarum ſupra R, ſic P S, ad S T. Tandem fiat vt S T, vna cum tot O H, quotus eſt numerus parabolæ,



læ, & cum excessu OH, supra Q, ad TP, & Q, sic Nk, ad KI. Affirmo punctum I, esse centrum æquilibrij segmenti AEBGC, in basi AC. Nam vt dictum est, k, & N, sunt centra æquilibrij totius parallelogrammi, & trilineorum simul coniunctorum. Cum ergo ex proposit. 14. lib. pri. sit vt parallelogrammum AF, ad segmentum AEBGC, sic PS, (quæ est PL, accepta secundum numerum parabolæ vnitate auctum) vna cum tot OH, quotus est numerus parabolæ vnitate auctus, ad ST, vna cum excessu tot OH, quotus est numerus parabolæ

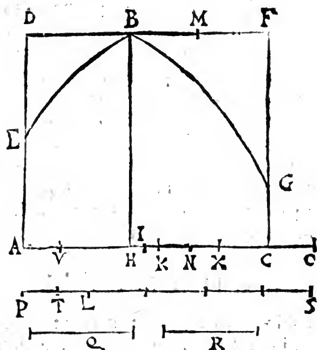
vnitate auctus supra Q. Ergo & diuidendo, trilinea erunt ad segmentum vt PT, & Q, ad TS, cum tot HO, quotus est numerus parabolæ, vna cum excessu OH, supra Q. Quare conuertendo, erit segmentum A E B G C, ad trilinea E D B F G, vt T S, vna cum H O, accepta secundum numerum parabolæ, & cum excessu O H, supra Q, ad PT, simul cum Q; nempe ex constructione, reciprocè vt N K, ad K I. Erit ergo I, centrum quæsitum. Quod &c.

SCHOLIVM I.

In segmento ergo parabolæ quadraticæ, erit centrum æquilibrij in basi AC, prius secta bifariam in k; deinde in V, & X, sic, vt HV, HX, sint triplæ ipsarum VA, XC: denuo sic in N, vt VN, sit ad NX, vt cubus CH, ad cubum HA: tandem in A k, dimidia totius attingente minorem E A, diametro parallelam, & in eiusdem puncto I, vbi sic diuiditur, vt N k, sit ad K I, vt S T, cum dupla H O, & cum excessu ipsius supra Q, quæ sit tertia minor proportionalis ipsarum OH, HC, ad PT, vna cum Q.

SCHOLIVM II.

Sed & tria ordinaria colligentur. Solum adnotetur, rationem cylindri ex parallelogrammo ad solida ex segmento reuoluto cum ipso tam circa D A, quam circa F C, esse eandem cum ratione rectanguli sub



li ſub A k, & ſub compoſita ex P S, & ex tot O H, quotus eſt numerus parabolæ vnitate auctus, ad rectangulum vel ſub A I, vel ſub I C, & ſub compoſita ex T S, ex HO, accepta ſecundum numerum parabolæ, & ex exceſſu OH, ſupra Q.

PROPOSITIO XXII.

Eiuſdem ſegmenti centrum æquilibrij reperire in alterutra diametro parallela.

SEd oporteat segmenti AEBGC, reperire centrum æquilibrij in alterutra ipsarum AE, CG, etiam producta si opus sit. Verum cum talis modus non differat à modo inueniendi tale centrum in portione maiori parabolæ, qui explicatus fuit proposit. 20. huius; ideo lector ad ipsius imitationem tale centrum reperiet, adhibendo congruam proportionem segmenti ad trilinea, in antecedent. proposit. vsam. Sicuti etiam ad modum eorum, quæ dicta sunt tot vicibus adinueniet centrum grauitatis prædicti segmenti; pariterque etiam agnoscet, tria solita deduci, etiam elici in præsentiarum.

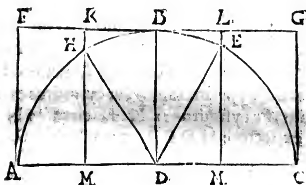
SCHOLIVM.

Quam longe, lateque pateat vsus trium propositionum initio huius libri explicatarum, lector ex supra dictis, potuit animaduertere. Verum etiam alijs inseruire possunt. Ipsis enim medijs possumus reperire centra grauitatis partium circuli methodo diuersa ab ea, qua ipsa inuenerunt acutissimi geometrę Ioannes della Failla, Guldinus, & forsitan alij, & varia tradere circa solida quædam rotunda ex circuli partibus reuolutis varie genita. Sit ergo

PRO-

PROPOSITIO XXIII.

Si cuilibet sectori circuli minori semicirculo sit circumscriptum rectangulum, quod cum sectore rotetur circa suum latus transiens per centrum sectoris. Cylindrus ex rectangulo erit sesquialter solidi ex sectore.



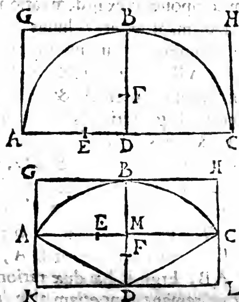
SIt sector minor semicirculo H D E, cuius axis B D, & cui sit circumscriptum rectangulum k N. Dico cylindrum ex k N, circa M N, esse sesquialterum solidi ex sectore H B E D, circa M N. Compleatur semicirculus A B C, & ei sit circumscriptum rectangulum F C, & hæc omnia intelligantur rotari circa A C. Sector solidus genitus à sectore H B E D, erit æqualis cono, cuius basis sit ęqualis superficiei sphæricæ ipsius (quę superficies erit quędam zona) altitudo vero æqualis semidiametro B D, vt facile elicitur ex Archim. pri. de sphær. & cylin. pro-

proposit.42.Sed vt deducitur ex eodem ibidem proposit. 31.& 32, etiam sphæra est ęqualis cono, cuius basis æquetur superficiei sphæricæ, altitudo vero sit æqualis semidiametro. Ergo sphæra erit ad talem sectorem solidum, vt superficies sphæræ, ad superficiem sectoris solidi. Sed superficies sphæræ, est ad superficiem sphæricam talis sectoris solidi vt AC, ad MN, vt elicitur ex eodem Archim. supra citato proposit. 40.& 41. Ergo & vt AC, ad MN, sic sphęra ad talem sectorem solidum. Sed vt AC, ad MN, sic cylindrus ex rectangulo FC, circa AC, ad cylindrum ex rectangulo KN, circa MN. Ergo & vt cylindrus ad cylindrum, sic sphæra ad solidum ex sectore. Et permutando, vt cylindrus ex FC, ad sphæram, sic cylindrus ex KN, circa MN, ad solidum ex sectore HDEB, circa MN. Sed cylindrus, ex Archim. citato proposit. 32. est sesquialter sphæræ. Ergo & cylindrus ex kN, erit sesquialter solidi ex sectore, &c. Quod &c.

PROPOSITIO XXIV.

Si semicirculi, seù sectoris eius cuiuscumque semidiameter sic secetur in puncto, vt sit sicut dimidia periphæria semicirculi, seù sectoris ad tertiam partem chordæ eiusdem, sic semidiameter ad sui partem abscindendam incipiendo à centro. Tale punctum erit centrum grauitatis semicirculi, seù sectoris.

Esto



ESto ABCD, vel ſemicirculus, vel quilibet circuli ſector, cuius centrum D, axis BD; & intelligamus eſſe vt AB, circumferentia, ad AE, quæ ſit tertia pars chordæ AC, ſic BD, ad DF. Dico F, eſſe centrum grauitatis ſemicirculi, ſeù ſectoris.

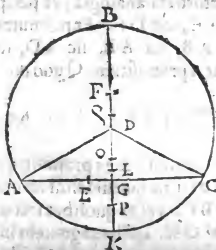
Probatur primo in ſemicirculo, cui circumſcribatur rectangulum GC, quod cum ſemicirculo rotetur circa AC. Ergo ex Archim. cita. cylindrus erit ſeſquialter ſphæræ. Quare cum AE, ſit duo tertia AD, quia eſt vnum tertium AC; ergo cylindrus erit ad ſphæram, vt DA, ad AE. At ratio DA, ad AE (de foris ſumpta circumferentia AB,) componitur ex rationibus DA, ad AB, circumferentiam,

rentiam, & huius ad A E. Ergo & ratio cylindri ad ſphæram componetur ex iiſdem rationibus. Verum ex ſchol. prim. propoſit. 3. huius. ratio cylindri ad ſphæram componitur quoque ex ratione rectanguli G D, ad A B C, ſemicirculum, & ex ratione B D, ad interceptam inter D, & centrum grauitatis ſemicirculi. Ergo rationes D A, ad circumferentiam A B, & huius ad A E, æquales erunt rationibus G D, ad ſemicirculum, & B D, ad interceptam inter D, & centrum grauitatis ſemicirculi. Verum quoniam, vt elicitur ex Archim. de circuli quadratura, & ex nobis propoſit. 6. lib. 2. rectangulum G D, eſt ad ſemicirculum, vt D A, ad circumferentiam A B. Ergo ſi hæ duæ rationes æquales ſubtrahantur, remanebunt etiam aliæ duæ rationes æquales. Ergo ratio circumferentiæ A B, ad A E, æqualis erit rationi B D, ad interceptam inter D, & centrum grauitatis ſemicirculi. Sed ex conſtructione, factum eſt vt circumferentia A B, ad A E, ſic B D, ad D F. Ergo F, erit centrum grauitatis ſemicirculi.

In ſectore minori, ei circumſcripto rectangulo G L, erit fere eadem demonſtratio. Quia in propoſit. anteced. oſtenſum eſt cylindrum ex parallelogrammo, G L, eſſe ſeſquialterum ſolidi ex ſectore, reuolutis ambobus circa k L; & etiam facile deducetur tam ex Archim. quam ex nobis, rectangulum G D, eſſe ad ſectorem vt G B, ſeù A M, ad A E. Vnde eodem modo concludetur F, eſſe centrum

graui-

grauitatis sectoris. At in sectore maiori compleatur circulus, cuius est sector, cuius diameter sit Bk, ise-



ctorisque minoris ADCK, sit centrum grauitatis L; & fiat vt BA, dimidia peripheria sectoris maioris, ad Ak, dimidiam minoris, sic LD, ad DF. Erit vt LD, ad DF, sic sector maior ABCD, ad sectorem minorem AKCD, quia sector, est ad sectorem, vt circumferentia, ad circumferentiam, seu vt dimidia circumferentia ad dimidiam circumferentiam. Sed D, est centrum totius circuli, L, sectoris minoris; ergo ex Archimede sæpe citato, F, erit centrum sectoris maioris. Quod vero punctum F, sic inuentum, sit idem cum puncto F, prius inuento, sic patebit. Nam quoniam per constructionem, est vt circumferentia AB, ad circumferentiam Ak; sic LD, ad DF; ergo & permutando, vt peripheria BA, ad LD, sic peripheria Ak, ad DF.

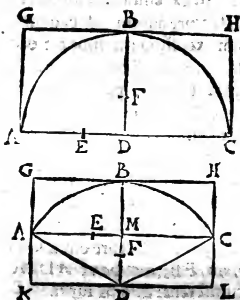
Sed vt ostensum est supra conuertendo, vt A E, ad circumferentiam A k, sic D L, ad D k. Ergo ex æquali in perturbata analogia, vt peripheria A B, ad D k, sic A E, ad D F. Et permutando, vt circumferentia A B, ad A E, sic k D, seù B D, ad D F. Ergo patet propositum. Quod &c.

SCHOLIVM.

Ex præsenti propos. & ex proposit. 4. huius. possumus inferre dari rationem solidi rotundi vel ex semicirculo A B C, vel ex quolibet sectore A B C D, reuoluto circa G H, ipsos tangentem in B, ad solidum ex ijsdem reuolutis circa A C, K L. In semicirculo ergo, & in sectore minori, ratio talis eadem erit cum ratione B F, ad F D; seù cum ratione excessus circumferentiæ A B, supra A E, ad A E. In sectore vero maiori semicirculo, eadem erit cum ratione B F, ad F G.

Insuper notetur qualiter dentur cubationes trunci sinistri cylindri recti tam super semicirculo, quam super sectore minori resecti plano transeunte, in semicirculo per A C, & per latus oppositum ipsi G H; in sectore vero minori, per K L, & per latus oppositum ipsi G H. Ratio est, quia cum in semicirculo, ex Archimede, cylindrus ex parallelogrammo G C, sit ad sphęram ex semicirculo in ratione sesquialtera; & cum ex supra dictis, sit truncus sinister cylindrici super parallelogrammo, nempe prisma, ad

trun-



truncum ſiniſtrum cylindri, quem alij vngulam vocant, vt cylindrus ad ſphęram. Ergo tale priſma, erit ſeſquialterum talis vngulæ. Idem probabitur in ſectore minori, quia ſupra probatum eſt cylindrum ſeſquialterum eſſe ſolidi ex ſectore. Et vt patet, tales cubationes habentur ſine circuli quadratura. Non ſic habentur cubationes truncorum dextrorum talium cylindricorum; quæ tamen etiam habentur, ſuppoſita circuli quadratura, quia ſuppoſita circuli quadratura, habentur rationes cylindrorum ex GC, in ſemicirculo, & ex GL, in ſectore minori ad annulos ſtrictos ex ſemicirculo, & ex ſectore minori, reuolutis circa GH. Ratio au-

tem hæc in ſemicirculo eſt eadem cum ratione A D, ſemidiametri, ad exceſſum circumferentiæ A B, ſupra A E. In ſectore autem, eſt eadem cum ratione k D, ad illum exceſſum: nempe eſt eadem cum ratione dimidiæ chordæ ad exceſſum dimidiæ circumferentiæ ſupra tertiam partem eiuſdem chordæ. Nam, cum ſit cylindrus ex parallelogrammo ſeſquialter ſolidi ex ſemicirculo, vel ex ſectore circa A C, ſeù k L, nempe ad ipſum, vt ſeſquialtera F D, ad F D: ſolidum vero circa A C, vel k L, ſit ad ſolidum circa G H, vt D F, ad F B. Ergo ex æquali, erit cylindrus ex parallelogrammo, ad ſolidum ex ſemicirculo, vel ex ſectore circa G H, vt ſeſquialtera F D, ad F B; nempe vt A D, vel KD, ad exceſſum circumferentiæ A B, ſupra A E.

PROPOSITIO XXV.

Sector circuli, eſt ad ſuum triangulum, vt quadratum ſemidiametri, ad rectangulum ſub altitudine trianguli, & ſub ſeſquialtera intercepta inter centrum circuli, & centrum grauitatis ſectoris.

SInt ſectores minor A k C D, & maior A B C D, in fig. ſeq. quorum triangulum A D C, quo minor excedit portionem A k C, maior vero deficit à portione A B C, centra vero grauitatis ipſorum ſint F, L; F, quidem maioris, L, vero minoris. Dico

co ſectorem AkCD, eſſe ad triangulum ADC, vt quadratum kD, ad rectangulum ſub GD, in ſeſquialteram DL: ſectorem vero ABCD, eſſe ad idem triangulum, vt idem quadratum ad rectangulum ſub GD, in ſeſquialteram FD.

Quoniam enim, vt deducitur ex ſchol. propoſit. 6. lib. 2. ſector AkCD, eſt æqualis triangulo, cuius baſis eſt æqualis circumferentiæ AKC, altitudo kD; & triangulorum proportio adinuicem componitur ex ratione baſium, & altitudinum. Ergo ratio ſectoris AkCD, ad triangulum ADC, componitur ex ratione circumferentiæ AkC, ad AC, ſeù circumferentiæ Ak, ad AG, & ex ratione kD, ad DG. Verum quoniam, ex propoſit. anteced. patet eſſe vt circumferentia Ak, ad AE, ſic kD, ad DL. Ergo, & vt circumferentia Ak, ad AG, ſeſquialteram AE, ſic kD, ad ſeſquialteram DL. Ergo & ratio ſectoris AKCD, ad triangulum ADC, componetur ex ratione KD, ad DG, & ex ratione KD, ad ſeſquialteram DL. Sed ex iiſdem rationibus componitur ratio quadrati kD, ad rectangulum ſub GD, & ſub ſeſquialtera DL. Ergo ſector erit ad triangulum vt illud quadratum ad illud rectangulum. Eodem modo demonſtrabitur etiam in ſectore maiori. Quare patet propoſitum.

CO-

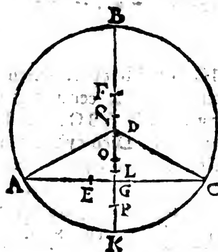
COROLLARIVM.

Ergo diuidendo, portio minor AKC, erit ad triangulum ADC, vt exceſſus quadrati kD, ſupra ſeſquialterum rectanguli GDL, ad ipſum ſeſquialterum rectanguli GDL. Componendo vero, portio maior ABC, erit ad idem triangulum, vt quadratum BD, cum ſeſquialtero rectanguli GDF, ad tale ſeſquialterum rectanguli GDF.

SCHOLIVM I.

His præoſtenſis, facile adinueniemus centrum grauitatis cuiuslibet portionis circuli: ſi enim inueniamus L, centrum grauitatis ſectoris minoris ADKC, & O, centrum grauitatis trianguli ADC, & fiat vt exceſſus quadrati KD, ſupra ſeſquialterum rectanguli GDL, ad idem rectangulum; nempe vt portio AkC, ad triangulum ADC, ſic reciprocè OL, ad LP. P, erit centrum grauitatis portionis AKC. Pariter ſi FO, ſic diuidatur in Q, vt ſit ſicut quadratum BD, ad ſeſquialterum rectanguli GDF, nempe vt ſector maior, ad triangulum, ſic reciprocè OQ, ad QF. Patet Q, eſſe centrum grauitatis portionis maioris ABC. Immo patet qualiter etiam poſſimus habere centrum grauitatis cuiuslibet ſegmenti circuli reſecti duabus chordis parallelis. Cum enim ſegmentum tale

aliud



aliud non sit quam differentia duarum portionum, & quidem circa eundem axim cum ipsis; patet ex centris grauitatis ipsarum, licere adinuenire centrum grauitatis segmenti.

PROPOSITIO XXVI.

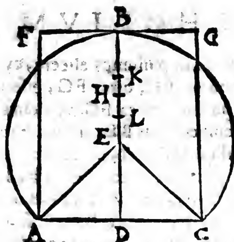
Si super basi, & circa axim maioris portionis circuli fiat rectangulum, quod simul cum portione voluatur circa basim ipsius portionis. Cylindrus ad solidum ex portione, erit vt parallelepipedum sub quadrato axis portionis, & sub sesquialtera interceptæ inter centrum circuli, & centrum grauitatis sectoris, ad parallelepipedum sub quadrato semidiametri in interceptam inter centrum grauitatis, & basim portionis, vna cum parallelepipedo sub eadem intercepta, & sub rectangulo, cuius vnum latus, sit altitudo coni sectoris, aliud vero, sesquialtera inter-

ceptæ

cepta inter centrum circuli, & centrum grauitatis sectoris.

ESto ABC, quælibet portio circuli maior, cuius centrum E, L, centrum grauitatis, H, vero centrum grauitatis ABCE, sectoris,& EK, sit sesquialtera EH. Dico cylindrum ex parallelogrammo FC, circa AC, ad solidum ex portione ABC, circa AC, esse vt parallelepipedum sub quadrato BD, in Ek, ad factum sub quadrato BE, in LD, vna cum parallelepipedo sub eadem DL, in rectangulum DEk. Nam ex schol. pri. proposit. 3. huius, ratio cylindri ad tale solidum componitur ex ratione parallelogrammi FD, ad portionem ABC, & ex ratione BD, ad DL; portio autem constat ex sectore, & ex triangulo; inueniendæ ergo sunt rationes illius parallelogrammi ad sectorem, & ad triangulum, vt inde compendiosius eliciatur ratio parallelogrammi ad portionem. Ex schol. proposit. 6. lib. 2. sector est æqualis rectangulo, cuius vnum latus BE, aliud circumferentia AB; & cum rationes rectangulorum componantur ex rationibus laterum. Ergo ratio rectanguli FD, ad sectorem, componetur ex ratione DB, ad BE, & ex ratione AD, ad circumferentiam AB. Verum, quoniam ex supra ostensis, cum H, sit centrum grauitatis sectoris, est vt AD, ad circumferentiam AB, sic Ek, sesquialtera EH, ad EB. Ergo ratio rectanguli FD, ad sectorem, componetur ex

ratio-



ratione D B, ad B E, & ex ratione E k, ad eandem E B; nempe erit ad sectorem, vt rectangulum sub D B, E k, ad quadratum E B. Pariter rectangulum F D, est ad triangulum A E C, vt B D, ad D E; nempe vt rectangulum sub D B, E K, ad rectangulum D E k. Ergo colligendo ambo consequentia, erit F D, ad portionem, vt rectangulum sub B D, E K, ad quadratum B E, cum rectangulo D E k. Quare ratio cylindri ex parallelogrammo F C, ad solidum ex portione, ambobus reuolutis circa A C, componetur ex ratione rectanguli D B, E K, ad quadratum B E, cum rectangulo D E K, & ex ratione D B, ad D L. Erit ergo cylindrus ad illud solidum vt parallelepipedum, cuius basis quadratum D B, altitudo E K, ad parallelepipedum sub quadrato B E, in D L, vna cum parallelepipedo sub D L, in rectangulum D E k.

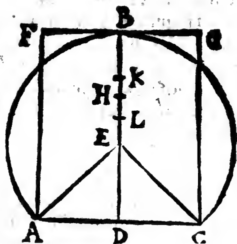
SCHOLIVM I.

Ex dictis facile possumus elicere, cylindrum ex parallelogrammo F C, circa F G, esse ad annulum strictum ex portione circa F G, vt idem antecedens, ad parallelepipeda sub B L, in quadratum BE, & in rectangulum D E k. Nam ex proposit. 4. huius, solidum ex portione circa A C, est ad solidum ex portione circa F G, vt D L, ad L B; nempe vt parallelepipeda sub quadrato B E, & sub rectangulo D E k, & sub altitudine D L, ad parallelepipeda sub ijsdem planis, & sub L B. Ergo ex æquali, patet propositum. Notetur tamen in progressu præsentis proposit. probatum esse, rectangulum F D, esse ad portionem, vt rectangulum D B, E K, ad quadratum B E, cum rectangulo D E k. Ex quibus deducetur, totum rectangulum F C, esse ad portionem, vt duplum rectangulum D B, E K; nempe vt triplum rectangulum D B, E H, ad eadem consequentia. Vnde subtriplando terminos, erit idem parallelogrammum ad eandem portionem, vt rectangulum D B, E H, ad tertiam partem quadrati B E, cum dimidio rectangulo D E H.

SCHOLIVM II.

Sed rationem cylindri ex F C, ad solidum ex portione circa A C, possumus aliter proponere; nempe

esse



esse vt idem antecedens præsentis propositionis, ad parallelepipedum sub quadrato semidiametri B E, in H D, interceptam inter basim portionis, & centrum grauitatis sectoris, vna cum parallelepipedo sub quadrato DE, altitudine coni, in dimidiam EH, interceptam inter centrum circuli, & centrum grauitatis sectoris. Hæc vero ratio deducetur comparando cylindrum ex F C, ad solida ex sectore, & ex cono circa A C. Nam ratio cylindri, ad solidum ex sectore A B C E, circa A C, componitur ex ratione rectanguli F D, ad sectorem; nempe vt notatum est in schol. anteced. ex ratione rectanguli B D, E K, ad quadratum B E, & ex ratione B D, ad DH. Ex istis vero rationibus componitur ratio parallelepipedi sub quadrato D B, in E K, ad parallelepipedum sub quadrato B E, in H D. Ergo cylindrus erit ad solidum ex sectore in ratione prædicto-

rum solidorum. Pariter idem cylindrus, est ad Rhombum ex triangulo A E C, circa A C, vt quadratum B D, ad tertiam partem quadrati D E; nempe vt solidum sub quadrato B D, in E K, ad solidum sub tertia parte quadrati D E, in E K, quod æquatur solido sub quadrato D E, in dimidiam EH. Ergo colligendo, cylindrus erit ad ambo solida, nempe ad solidum ex portione, circa A C, vt parallelepipedum sub quadrato B D, in K E, ad parallelepipedum sub quadrato B E, in H D, vna cum parallelepipedo sub quadrato D E, in dimidiam E H.

Notetur tamen in progressu huius scholij, probatum esse cylindrum ex F C, ad solidum ex sectore circa A C, esse vt parallelepipedum sub quadrato B D, in E k, ad parallelepipedum sub quadrato B E, in H D. Ex quo facile potest concludi, cylindrum ex eodem parallelogrammo circa F G, esse ad solidum ex eodem sectore circa F G, vt idem antecedens, ad factum sub quadrato B E, in B H.

Ex omnibus ergo dictis licuit animaduertere, qualiter supposita circuli quadratura, dentur cubationes truncorum omnium cylindricorum rectorum tam super portione A B C, quam super sectore A B C E, consueto modo resectorum.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

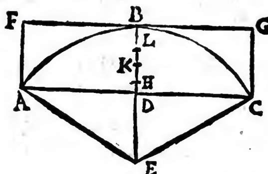
Si cuilibet portioni minori circuli sit circumscriptum rectangulum, quod cum ipsa voluatur circa chordam portionis. Erit cylindrus ex rectangulo ad solidum ex portione, vt antecedens propositionis antecedentis; ad parallelepipedum sub intercepta inter cordam, & centrum grauitatis portionis in rectangulum contentum sub semidiametro, & sub excessu ipsius supra sesquialteram interceptæ inter centrum circuli, & centrum grauitatis sectoris, vna cum parallelepipedo sub eadem intercepta inter cordam, & centrum grauitatis portionis, in rectangulum, cuius vnum latus sit axis portionis, aliud sesquialtera interceptæ inter centra circuli, & grauitatis sectoris.

ESto portio minor circuli ABC, cum sibi circumscripto rectangulo FC, & cum suo sectore ABCE; sit autem H, centrum grauitatis sectoris ABCE, Ek, sit sesquialtera EH, L, vero sit centrum grauitatis portionis, & intelligamus ambas figuras rotari circa AC. Dico cylindrum ex FC, esse ad solidum ex portione vt parallelepipedum sub quadrato DB, in Ek, ad parallelepipedum sub LD, & sub rectangulo EBk, vna cum parallelepipedo sub eadem LD, in rectangulum DB, kE.

Quoniam enim ex schol. pri. proposit. 3. huius, cylindrus ex parallelogrammo ad solidum ex portione

tione habet rationem compositam ex ratione rectanguli FD, ad portionem, & ex ratione BD, ad DL: ratio vero rectanguli ad portionem componitur ex ratione rectanguli ad sectorem, & huius ad portionem. Ergo & ratio cylindri ad solidum componetur ex ijsdem rationibus. At ratio rectanguli FD, ad sectorem ABCE, componitur ex ratione AD, ad circumferentiam AB, & ex ratione DB, ad EB; & vt deducitur ex proposit. 24. huius. est vt AD, ad circumferentiam AB, sic KE, ad EB; vnde ratio rectanguli FD, ad sectorem componitur ex ratione kE, ad EB, & ex ratione DB, ad EB; nempe rectangulum FD, est ad sectorem vt rectangulum Ek, DB, ad quadratum BE. Pariter sector est ad portionem vt quadratum BE, ad excessum ipsius supra rectangulum DEk, ex conuersione rationis proposit. 25. huius. Ergo ratio FD, ad portionem ABL, componetur ex ratione rectanguli Ek, DB, ad quadratum BE; & huius ad excessum eiusdem supra rectangulum DEk; nempe FD, erit ad ABC, vt rectangulum BD, Ek, ad excessum quadrati EB, supra rectangulum DEk. Cum ergo talis excessus sit rectangulum kBE, cum rectangulo kE, DB (quia quadratum BE, æquatur rectangulis kBE, kEB, quod rectangulum KEB, diuiditur in rectangula kED, & kE, DB.) Ergo FD, erit ad ABC, vt rectangulum KE, DB, ad rectangula kBE; kE, DB.

Ergo



Ergo à primo ad vltimum, ratio cylindri ex FC, circa AC, ad solidum ex ABC, circa AC, componetur ex ratione rectanguli BD, kE, ad rectangula KBE; KE, DB, & ex ratione BD, ad DL. Sed ex ijsdem rationibus componitur ratio parallelepipedi sub rectangulo BD, KE, in BD; nempe sub quadrato BD, in KE, ad duo parallelepipeda, quorum altitudo sit DL, bases vero rectangula kBE; BD, KE. Ergo cylindrus est ad solidum vt illud parallelepipedum, ad hęc parallelepipeda. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM I.

Sed etiam in hac propositione facile possumus deducere, rationem cylindri ex eodem rectangulo circa FG, ad annulum strictum ex eadem portione circa FG. Hanc autem faciliter patebit, esse eandem cum ratione prædicti antecedentis ad parallelepipe-

lepipeda, quorum altitudo sit B L, bases vero prædicta rectangula.

Notetur tamen in progressu demonstrationis superioris ostensum esse, F D, esse ad portionem, vt rectangulum k E, D B, ad idem rectangulum, cum rectangulo E B k. Ex quibus deducitur, rectangulum F C, esse ad eandem portionem, vt duplum rectangulum B D, k E, ad eadem rectangula consequentia.

SCHOLIVM II.

Verum aliam rationem cylindri ex F C, ad prædicta solida possumus assignare. Nimirum quod sit, vt prædictum antecedens ad parallelepipeda, quorum altitudo sit L D, bases vero rectangula D B E; D E, k B (si cylindrum referatur ad solidum ex portione circa A C) vel quorum altitudo sit B L, bases vero eadem rectangula (si cylindrus comparetur cum solido ex portione circa F G). Ratio est, quia quadratum E B, non solum excedit rectangulum D E k, rectangulis E B k; E k, D B, vt dictum est; sed etiam rectangulis D B E; E D, k B, vt consideranti patebit.

Ex dictis ergo licet animaduertere, qualiter etiam, supposita circuli quadratura, dentur cubationes truncorum amborum cylindrici recti super qualibet circuli portione existentis, & consueto modo diagonaliter resecti, &c.

Verum

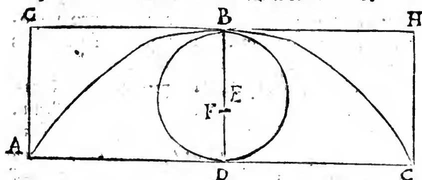
Verum antequam finem huic tertio libro imponamus, vt magis, magisque appareat fæcunditas propositionum supra explicatarum, non erit inutile aliquid circa solida cycloidalia pronuntiare. Torricellius lib. pri. de motu gra schol. proposit. 18. ait. *Satis sit interea lectorem hic admonuisse quod si cyloidis spatium circa basim conuertatur, erit solidum ad cylindrum circumscriptum vt 5. ad 8. si vero circa tangentem basi parallelam vt 7. ad 8. centrum cycloidis axem secat vt partes sint vt 7. ad 5.* Tria ergo pronuntiat Torricellius, quorum vno dato, reliqua nequeunt latere, vt patebit. Supponendo ergo centrum grauitatis cycloidis secare axim, vt pars ad verticem sit ad reliquam vt 7. ad 5. sit.

PROPOSITIO XXVIII.

Si cycloidi primariæ sit circumscriptum parallelogrammum, quod cum ipsa rotetur circa basim. Erit cylindrus ad fusum cycloidalem vt 8. ad 5. si vero conuertantur ambo circa latus tangens, & basi parallelum. Erit cylindrus ad solidum vt 8. ad 7.

Esto cyclois primaria ABC, cum sibi circumscripto rectangulo GC, & cuius axis BD. Dico quod si ambo rotentur circa AC, erit cylindrus ad solidum ex cycloide (quod ad imitationem antecedentium vocamus fusum cycloidalem) vt 8.

 ad 5.



ad 5. Ad annulum vero ſtrictum ex cycloide circa GH, vt 8. ad 7.

Probatur prima pars. Quia ex eodem Torricellio in appendice de cycloide, & ex Tacquet in diſſert. de motu, &c. theor. 20, parallelogrammum GC, eſt ſeſquitertium cycloidis, vnde eſt ad ipſam vt 4. ad 3. ſed ex propoſit. 3. huius, ratio cylindri ad fuſum cycloidalem componitur ex ratione GC, ad cycloidem, & ex ratione ED, (ſupponendo ED, eſſe dimidiam BD) ad FD (ſupponendo F, eſſe centrum grauitatis cycloidis) quæ ratio ED, ad DF, eſt vt 6, ad 5. Ergo ratio cylindri ad fuſum componitur ex rationibus 4. ad 3. & 6. ad 5. Sed ex iſtis rationibus componitur quoque ratio 24, ad 15. Ergo cylindrus erit ad fuſum. vt 24. ad 15. nempe vt 8. ad 5.

Secunda pars facile patebit, quia ex propoſit. 4. huius, fuſus ex cycloide, eſt ad annulum ſtrictum ex eadem circa GH, vt DF, ad FB; nempe vt 5. ad 7. Quare ex æquali, patet etiam ſecundum. Quod &c.

SCHO-

SCHOLIVM.

Ex dictis patet, qualiter habeamus cubationes truncorum cylindrici recti super cycloide existentis resecti vt sæpe dictum est.

PROPOSITIO XXIX.

Fusus cycloidalis est ad annulum strictum ex circulo genitore. vt 5. ad 2.

SEd supponamus cycloidem cum circulo genitore rotari circa AC. Dico fusum cycloidalem esse ad annulum strictum vt 5. ad 2. Patet faciliter, quia fusus ad illum annulum habet rationem compositam, ex 3. huius, ex ratione cycloidis ad circulum; nempe ex ratione 3. ad 1. & ex ratione DF, ad DE; nempe ex ratione 5. ad 6. Sed ex istis rationibus componitur ratio 15, ad 6. Ergo fusus erit ad illum annulum strictum vt 15. ad 6, nempe vt 5. ad 2. Quod &c.

COROLLARIVM.

Ergo annulus strictus ex cycloide circa GH, erit ad annulum strictum ex circulo prædicto vt 7. ad 2.

SCHOLIVM.

Torricellius in præcitato loco de motu grauium, subiungit. *Demonstratur etiam ratio solidi circa axem ad cylindrum circumscriptum; item in qua linea axi parallela sit centrum semicycloidis.* Patet ex dictis, vno, vel altero dato, statim aliud innotescere. Nos in præsenti nec vnum, nec aliud habemus, nec tempus adest hæc ipsa rimandi. Plura indigesta, immaturaque phantasiam occupant circa cycloidem ordinariam, & alias infinitas diuersi generis illarum, quæ circumferuntur; quæ forsitan aliquando, si Deus vitam, sanitatem, & maius comodum præstabit, lectori communicabimus. Interea, antequam huic tertio libro finem imponamus, notetur, non solum, inuenta esse centra grauitatis prædictarum figurarum, quarum inuenta sunt, sed etiam facile haberi posse centra grauitatis omnium cylindricorum super ijsdem existentibus. Si enim linea centra grauitatis oppositarum basium coniungens bisecetur, punctum bisectionis præstabit centrum grauitatis cylindrici. Quod indicasse lectori sufficiat.

Explicit Liber Tertius.

DE



DE INFINITIS PARABOLIS, ETC.



LIBER QVARTVS.



ACutissimus Caualerius in suis exercitationibus geometricis exercit. 5. nouum modum instituit considerandi grauitatem, vel in eam habentibus, vel in eam habere conceptis. Cum enim (vt ipsemet ait in præfatione eiusdem exercitationis) geometria ad sua tempora vsque grauitatem non nisi vniformem in eadem quantitate agnouerit, licet in diuersis corporibus varios gradus eiusdem admiserit, ipse deinceps Caualerius rerum pulcherrimarum indagator, cæpit philosophari circa diuersa symptomata, quæ tunc acciderent si eadem quantitas non supponatur vniformiter grauis, sed vniformiter cum difformitate quadam. Inter cætera principia, quæ iecit

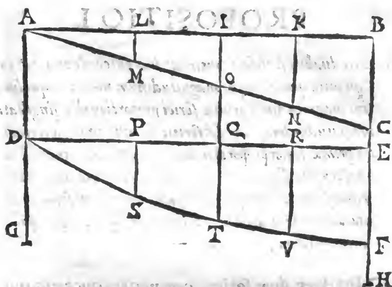
pro

pro huiusce speciosi ædificij mole fulcienda, extant tamquam principalia definitio 12. & proposit. 9. Verum quia hæc, sicuti & alia, constructa sunt incomparabili methodo indiuisibilium, per quam (licet à nobis regalem prospectam) non intelligimus procedere in sequentibus; ideo cum præcitatis principijs indigeamus pro aliquibus tradendis, ferè eadem explicabimus, licet methodo à caualeriana diuersa. Procedemus autem absque in diuisibilibus, & grauitatem tantum vniformem in eadem quantitate considerabimus. In præsenti autem ex definitione Caualerij, eliciemus & nos definitionem quandam pro nostro instituto, vniuersaliori tamen modo propositam. Sit ergo.

DEFINITIO.

Plana, vel solida proportionaliter analoga in magnitudine, dicentur, in quibus ductis lineis, vel planis, lineę, vel plano pro regula inseruiente, parallelis, & lineam quandam, quę sit vel altitudo, vel veluti altitudo figurarum proportionaliter secantibus, semper secabunt plana, vel solida proportionaliter, seu in partes proportionales.

Verum, vt hæc definitio clarius explicetur, dentur duo plana, vel solida, vel vnum planum, alterum solidum ACB, DFE, quorum altitudines, seu veluti altitudines AB, DE, siue sint æquales, siue inæquales, secentur proportionaliter in quibuslibet



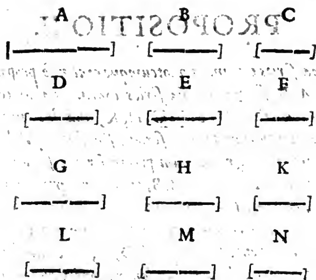
bet punctis L, K, P, R, lineis, vel planis L M, P S; k N, R V, B C, E F, parallelis, adeo vt sit vt B A, ad A L, sic E D, ad D P; vel vt B A, ad A k, sic E D, ad D R. Si quam proportionem habet segmentum L M C B, ad segmentum A M L, hanc eandem habeat segmentum P S F E, ad segmentum D S P; vel segmentum K N C B, sit ad segmentum A N k, vt segmentum R E F V, ad segmentum D V R, & sic semper, vbicumque plana, vel solida ducta fuerint. Plana, vel solida A C B, D F E, dicentur plana, vel solida proportionaliter analoga in magnitudine.

PRO-

PROPOSITIO I.

Si datis duabus seriebus continentibus antecedentia, & consequentia quotcumque magnitudinum numero æqualium, sint magnitudines primæ seriei proportionales singillatim magnitudinibus secundæ seriei; sintque omnia antecedentia primæ seriei proportionalia cum omnibus antecedentibus secundæ seriei. Erunt collectiuè omnia antecedentia primæ seriei, ad omnia consequentia eiusdem seriei, vt omnia antecedentia secundæ seriei, ad omnia consequentia eiusdem seriei.

SInt datæ duæ series continentes quotcumque magnitudines; in prima sint A, B, C, antecedentes, & D, E, F, consequentes; in secunda antecedentes sint G, H, K, consequentes L, M, N; sitque vt A, ad D, sic G, ad L; & vt B, ad E, sic H, ad M, &c. Pariter sit vt A, ad B, sic G, ad H; & vt B, ad C, sic H, ad K. Dico colligendo, A, B, C, esse ad D, E, F, vt G, H, k, ad L, M, N. Quoniam enim vt A, ad B, sic G, ad H; erit componendo, A, cum B, ad B, vt G, cum H, ad H. Vel conuertendo, & componendo, B, cum A, ad A, vt H, cum G, ad G. Cum vero sit A, ad D, vt G, ad L. Ergo ex æquali, erit vt B, cum A, ad D, sic H, cum G, ad L. Pariter cum sit vt B, ad E, sic H, ad M. Ergo item ex æquali, erit vt A, cum B, ad E, sic G, cum H, ad M. Quare etiam colli-

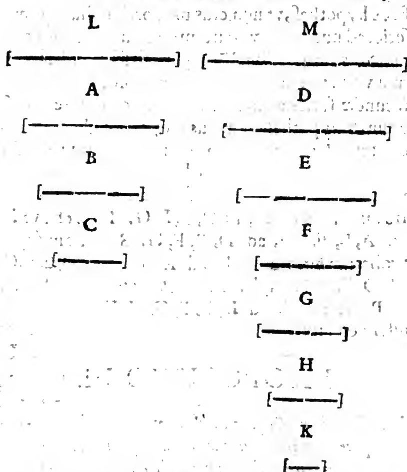


colligendo, erit vt A, cum B, ad D, cum E, sic G, cum H, ad L, cum M. Denuò, cum sit vt A, cum B, ad B, sic G, cum H, ad H; & pariter sit vt B, ad C, sic H, ad k. Ergo ex æquali, & componendo, erit vt A, B, C, ad C, sic G, H, K, ad k. Vel ex æquali, conuertendo, & componendo, vt C, B, A, ad B, A, sic k, H, G, ad H, G. At vt B, A, ad E, D, sic H, G, ad M, L. Ergo vt C, B, A, ad D, E, sic k, H, G, ad L, M. Pariter cum sit vt C, ad F, sic K, ad N. Ergo rursum ex æquali, erit vt A, B, C, ad F, sic G, H, k, ad N. Ergo denuo colligendo, erit A, B, C, ad D, E, F, vt G, H, k, ad L, M, N. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO II.

Sit vna ſeries continens quotcumque continuè proportionales A, B, C, & ſit alia ſeries continens alias continuè proportionales, D, E, F, G, H, K, quæ ſint numero duplæ magnitudinum primæ ſeriei, ſed ſint in ſubduplicata proportione magnitudinum primæ ſeriei; ſit autem alia magnitudo L, quæ ad A, B, & cæteras proportionales, ſi ſint, vltima ſemper excepta, habeat eandem rationem quam numerus omnium proportionalium ad numerum vnitate minorem: item M, ad D, E, &c. duabus vltimis exceptis, habeat eandem rationem quam numerus omnium proportionalium ad numerum minorem ſe binario. Erit L, ad omnes proportionales primæ ſeriei, vt M, ad omnes proportionales ſecundæ ſeriei.

QVoniam enim, D, E, F, & cæteræ magnitudines ſecundæ ſeriei ſunt ſubduplicatæ in proportione cum magnitudinibus A, B, C, primæ ſeriei; ergo erit vt A, ad B, ſic D, ad F, & vt B, ad C, ſic F, ad H. Pariter vt A, ad B, ſic E, ad G, & G ad k. Vnde D, F, H, ſicuti etiam E, G, k, erunt proportionales cum A, B, C. Erit ergo vt A, ad A, B, C, ſimul, ſic tam D, ad D, F, H, ſimul, quam E, ad E, G, k, ſimul. Quare erit etiam vt A, ad A, B, C, ſimul, ſic D, & E, ſimul ad D, E, F, G, H, k, ſimul. Eodem modo probabitur eſſe vt B, ad A, B, C, ſimul, ſic tam F, ad D, F, H, ſimul, quam G, ad



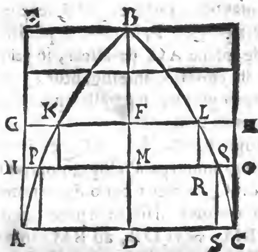
G, ad E,G,K, ſimul: & pariter probabitur vt B, ad A, B, C, ſimul, ſic ambas F, G, ad omnes. Quare probabitur etiam vt A, cum B, ad A, B, C; nempe omnes proportionales primæ ſeriei, vltima excepta, ad omnes proportionales primæ ſeriei, ſic D, E, F, G, ad D, E, F, G, H, k; nempe omnes proportionales ſecundæ ſeriei duabus vltimis exceptis, ad omnes proportionales eiuſdem ſeriei. Verum cum L, ad A, B,

ſit ex hypotheſi, vt numerus proportionalium primæ ſeriei ad numerum vnitate minorem; & cum ſit vt numerus proportionalium primæ ſeriei ad numerum vnitate minorem, ſic numerus proportionalium ſecundæ ſeriei ad numerum binario minorem (eſt enim ex hypotheſi numerus proportionalium ſecundæ ſeriei duplus numeri proportionalium primæ ſeriei) & cum pariter ſit ex hypotheſi, vt numerus proportionalium ſecundæ ſeriei ad numerum binario minorem, ſic M, ad D, E, F, G. Ergo erit vt L, ad A, B, ſic M, ad D, E, F, G. Sed etiam ſupra probatum eſt, eſſe A, B, ad A, B, C, vt D, E, F, G, ad D, E, F, G, H, k. Ergo ex æquali, erit L, ad A, B, C, vt M, ad D, E, F, G, H, K. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO III.

Cylindrus circumſcriptus cuilibet conoidi parabolico, cuius exponens ſit numerus par, eſt ad ipſum, vt parallelogrammum circumſcriptum parabolæ, cuius exponens ſit ſubduplus numeri conoidis, ad ipſam parabolam, & hoc tam ſecundum totum, quam ſecundum partes proportionales.

Esto quodlibet conoides parabolicum ABC, cuius exponens ſit numerus par, nempe ſit vel quadraticum, vel quadratoquadraticum, vel cubocubicum &c. cui ſit circumſcriptus cylindrus EC; ſuppo-



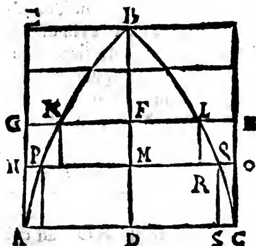
supponatur autem A B C, esse etiam parabolam cum sibi circumscripto parallelogrammo E C, cuius exponens sit subduplus exponẽtis numeri conoidis. V. g. si conoides sit quadraticum, parabola sit linearis. Si conoides sit quadratoquadraticum, parabola sit quadratica. Si conoides sit cubocubicum, parabola sit cubica, &c. Dico cylindrum E C, esse ad conoides A B C, vt parallelogrammum E C, ad parabolam A B C. Pariter si diametri D B, in vtraque figura secentur proportionaliter in F, adeo vt D B, ad B F, in conoide sit vt D B, ad B F, in parabola, & in conoide ducatur planum G H, A C, parallelum, in parabola vero linea itidem A C, parallela. Dico esse cylindrum A H, ad frustum

AkLC,

A k L C, vt parallelogrammum A H, ad segmentum A k L C. Idem intelligatur de alijs partibus proportionalibus. Diametri D B, secentur proportionaliter in punctis F, M, &c. & per illa transeant in conoide, plana A C, parallela, in parabola vero lineæ; & in cylindro intelligantur cylindri G O, N C, partes cylindri; in parallelogrammo verò, parallelogramma ipsius partes. Item in conoide intelligantur super basibus k L, P Q, cylindri k R, P S; in parallelogrammo parallelogramma, vt in schemate. Tunc. Quoniam in conoide vt potestas A D, congruens conoidi ad similem potestatem P M, sic D B, ad B M; & vt D B, ad B M, in conoide, sic D B, ad B M, in parabola; & vt D B, ad B M, in parabola, sic potestas A D, congruens parabolæ ad similem potestatem P M. Ergo vt in conoide potestas A D, ipsi congruens ad similem potestatem P M, sic in parabola potestas A D, ipsi congruens ad similem potestatem P M. At proportiones potestatum conoidis sunt duplicatæ potestatum parabolæ; nempe exponentes potestatum conoidis tot vicibus continent binarium, quot vicibus exponentes potestatum parabolæ continent vnitatem. Ergo & vt primæ potestates conoidis ad se inuicem, sic primæ potestates parabolæ ad se inuicem; nempe vt quadratum A D, seù N M, in conoide ad quadratum P M, sic linea A D, seù N M, in parabola, ad P M.

Quæ vsque modo dicta sunt conseruentur, quia

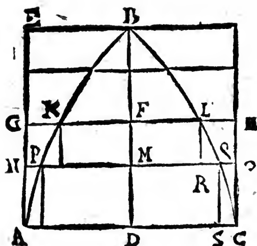
licet



licet certè teneamus hæc viris geometris clara esse, attamen libet exemplo explicare quid per superiora intellexerimus. Exemplificetur autem in conoide cubocubico, & in parabola cubica. Quoniam enim exponens, seù numerus conoidis cubocubici est 6. exponens vero parabolæ cubicæ 3. & quoniam probatum est esse vt cubocubus AD, seù NM, ad cubocubum PM, sic in parabola cubus AD, seù NM, ad cubum PM. Ergo & subtriplicando proportiones, illæ proportiones subtriplicatæ erunt æquales; nempe erit vt in conoide quadratum NM, ad quadratum PM, sic in parabola latus NM, ad latus PM. Sicuti enim proportio quadratorum est subtriplicata proportionis cubocuborm ,u sic proportio

portio laterum est subtriplicata proportionis cuborum. Sed ad ipsam demonstrationem redeamus.

Sed vt quadratum NM, in conoide, ad quadratum PM, sic cylindrus NC, ad cylindrum PS: & vt NM, ad PM, in parabola, sic parallelogrammum NC, ad parallelogrammum PS. Ergo & vt cylindrus ad cylindrum, sic parallelogrammum ad parallelogrammum. Eodem modo ostendetur cylindrum GO, esse ad cylindrum KR, vt parallelogrammum GO, ad parallelogrammum kR. Idemque ostenderetur de omnibus alijs, si diametri in plures, pluresque partes proportionales essent sectæ. Et cum sit vt cylindrus AO, ad cylindrum NH, sic parallelogrammum AO, ad parallelogrammum NH. Ergo, ex prima huius, vt omnes cylindri antecedentes ad omnes cylindros consequentes, sic omnia parallelogramma antecedentia, ad omnia parallelogramma consequentia; nempe sic cylindrus GC, ad cylindros KR, PS, vt parallelogrammum GC, ad parallelogramma kR, PS. Cum autem sit etiam cylindrus EC, ad cylindrum GC, vt parallelogrammum EC, ad parallelogrammum GC. Ergo ex æquali, cylindrus EC, erit ad omnes cylindros in conoide inscriptos, vt parallelogrammum ad omnia parallelogramma in parabola inscripta. Facile autem probabitur modo Archimedeo, esse cylindrum ad conoides, vt parallelogrammum ad parabolam: quia in conoide inscribetur solidum constans ex cylindris sibi superimpositis defi-



deficiens à conoide defectu quocumque dato minori : pariter in parabola possunt inscribi parallelogramma deficientia à parabola defectu minori quacumque magnitudine data. Quare per deductionem ad impossibile, concludetur propositum. Cum autem hæc sint nimis Geometris familiaria, & nimis viris Euclideis, & Archimedeis obuia, & cum hujus deductionis ad impossibile sint nonnulla exempla in secundo libro, ideo propter tedij ablationem, ex industria relinquuntur.

Non dissimili Methodo patebit, quamlibet partem cylindri circumscripti conoidi, esse ad partem conoidis, quam includit, vt quælibet pars parallelogrammi circumscripti parabolæ, ad portionem ip-

S s sius,

sius, quam includit, dum tamen antecedentia sint proportionalia suis consequentibus. Quare probatum est, quod probandum erat.

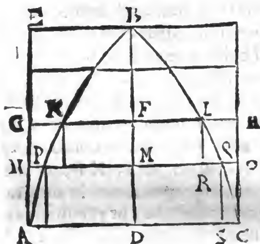
Notandum tamen est, cum hoc etiam probatum esse per conuersionem rationis, excessum cylindri supra conoides, esse ad ipsum tam secundum totum, quam secundum partes sicuti excessus parallelogrammi supra parabolam ad ipsam.

SCHOLIVM I.

Ex dictis facile eliciemus talia conoidea esse magnitudines proportionaliter analogas cum ipsis parabolis, iuxta sensum definitionis prius traditæ, tam secundum totum quam secundum partes proportionales. Nam cum sit v. g. conuertendo, segmentum conoidis AkLC, ad cylindrum GC, vt segmentum parabolæ AKLC, ad parallelogrammum GC: & cum vt cylindrus AH, ad cylindrum HE, sic parallelogrammum AH, ad parallelogrammum HE: & pariter cum sit cylindrus EH, ad conoides kBL, vt parallelogrammum EH, ad parabolam kBL. Ergo ex æquali, erit segmentum conoidis AkLC, ad conoides ad verticem kBL, vt segmentum parabolæ AkLC, ad parabolam ad verticem kBL. Eodem modo probabitur excessum cylindri supra conoides, esse magnitudinem proportionaliter analogam cum excessu parallelogrammi supra parabolam, tam secundum totum, quam secundum partes proportionales.

SCHO-

SCHOLIVM II.



Etiam ergo ex dictis in hac propositione, patet qualiter habeamus non modo rationem cylindrorum circumscriptorum conoidibus parabolicis, quorum exponentes sint pares, ad ipsa conoidea, sed etiam rationem cylindrorum circumscriptorum frustis eorum, plano basi parallelo resectorum. Nam ex dictis in primo lib. proposit. pri. & 8. habemus quadraturas infinitarum parabolarum, & rationem, quam habet in qualibet parabola parallelogrammum circumscriptum segmento parabolæ resectæ linea basi parallela, ad ipsum segmentum. Erit ergo

cylindrus ad primum conoides par, nempe ad quadraticum, vt 2. ad 1. Ad fecundum, nempe ad quadratoquadraticum, vt 3. ad 2. Ad tertium, nempe ad cubocubicum vt 4. ad 3. Et fic in infinitum. Nempe cylindrus eft ad conoides tale, vt dimidium numeri conoidis vnitate auctum, ad dimidium numeri conoidis. Quæ concordant cum dictis in vltima propofit. 2. libri huius, vt experienti patebit, quia eadem eft ratio prædicta cum ratione ibidem affignata; nempe, quam habet numerus conoidis auctus binario ad numerum conoidis. Pariter erit v. g. cylindrus GC, ad fegmentum conoidis AkLC, vt magnitudo, quæ ad AD, KF, & cæteras tot continuè in harum proportione, vt numerus earum æquetur numero parabolæ, fit vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ, ad AD, kF, & cæteras tot continuè proportionales, vt earum numerus excedat numerum parabolæ vnitate. Nam fic ex propofit. 8. lib. prim. eft parallelogrammum AH, ad fegmentum parabolæ AKLC. Et hæc concordant cum dictis in fcholio 2. propofit. vltimæ 2. libri. Nam eadem eft ratio hic affignata, cum ratione ibidem affignata. Eandem enim rationem in parabola habet magnitudo, quæ ad AD, KF, & cæteras tot proportionales quotus eft numerus parabolæ fit vt numerus parabolæ, vnitate auctus ad numerum parabolæ, ad AD, kF, & cæteras tot proportionales quotus eft numerus parabolæ vnitate auctus, quam habeat in conoide, cuius exponens

fit

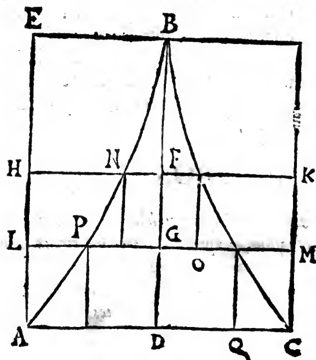
ſit duplus exponentis parabolæ, magnitudo, quæ ad A D, k F, & cæteras tot proportionales quotus eſt numerus conoidis, ſit vt numerus conoidis vnitate auctus ad numerum conoidis, ad A D, k F, & cæteras tot proportionales vt numerus earum excedat numerum conoidis binario. Quod patet ex propoſit. 2. huius.

PROPOSITIO IV.

Cylindrus circumſcriptus cuilibet infinitorum conicorum, eſt ad ipſum, vt parallelogrammum circumſcriptum trilineo, cuius exponens ſit duplus exponentis conici, ad ipſum, tam ſecundum totum, quam ſecundum partes proportionales.

ESto quodlibet infinitorum trilineorum A B D, ex cuius reuolutione circa diametrum B D, ſit ortus conicus A B C, cui ſit circumſcriptus cylindrus E C: item ſupponamus A B D, aliud eſſe trilineum, cuius exponens ſit duplus exponentis conici A B C; ſitque ei circumſcriptum parallelogrammum E D. Aſſero cylindrum E C, eſſe ad conicum A B C, vt parallelogrammum E D, ad trilineum A B D, & hoc tam ſecundum totum, quam ſecundum partes proportionales, iuxta explicata in antecedenti propoſit.

Diametri B D, ſecentur proportionaliter in qui-

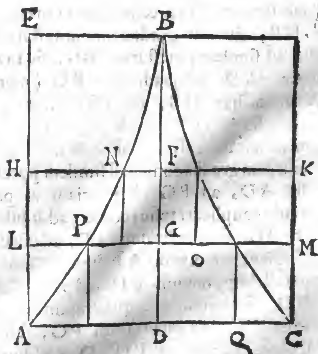


quibuslibet punctis F, G, &c. & per illa transeant in conico, & cylindro, plana HFk, LGM, plano ADC, parallela; in trilineo vero, & parallelogrammo, HF, LG, basi AC, parallelæ. In conico autem intelligantur cylindri NO, PQ, inscripti; in trilineo vero parallelogramma NG, PD, pariter ipsi inscripta. Tunc. Quoniam BD, sectæ supponuntur proportionaliter in G; ergo vt DB, ad BG, in conico, sic DB, ad BG, in trilineo. Quare & in trilineo, vt potestas DB, eiusdem gradus cum trilineo ad similem potestatem BG, sic

sic in conico similis potestas DB, ad similem potestatem BG. At vt potestas DB, in trilineo eiusdem cum ipso gradu, ad similem potestatem BG, sic ex natura parabolarum, & trilineorum, linea AD, ad lineam PG; & pariter vt in conico potestas DB, eiusdem gradus cum potestate trilinei ABD, ad similem potestatem BG, sic in conico quadratum AD, ad quadratum PG (nam potestas in conico hæc DB, ad BG, supponitur duplicata potestatis DB, eiusdem gradus conici, ad similem potestatem BG: cumque sit vt potestas DB, eiusdem gradus conici ad similem potestatem BG, sic AD, ad PG. Erit etiam vt potestas DB, gradus duplicati ipsius conici, ad similem potestatem BG, sic quadratum AD, ad quadratum PG.) Ergo vt in trilineo, AE, seù LG, ad PG; seù vt parallelogrammum LD, ad parallelogrammum PD, sic in conico, quadratum AD, seù quadratum LG, ad quadratum PG; seù cylindrus LC, ad cylindrum PQ. Quæ vsque modo dicta sunt, patent ex exemplificatis in ante. propos. Eodem modo probabitur cylindrum HM, esse ad cylindrum NO, vt parallelogrammum HG, ad parallelogrammum NG. Et eodem modo probaretur in omnibus alijs. Quare etiam ad modum antecedentis propositionis concludetur, cylindrum EC, esse ad conicum ABC, vt parallelogrammum ED, ad trilineum ABD, & hoc tam secundum totum, quam secundum partes proportionales.

CO-

COROLLARIVM.



Ergo & per conuerſionem rationis, erit cylindrus EC, ad annulum ſtrictum ortum ex reuolutione ſemiparabolæ EBA, reuolutæ circa BD, vt parallelogrammum ED, ad ſemiparabolam EBA, & hoc tam ſecundum totum, quam ſecundum partes proportionales.

SCHO-

SCHOLIVM I.

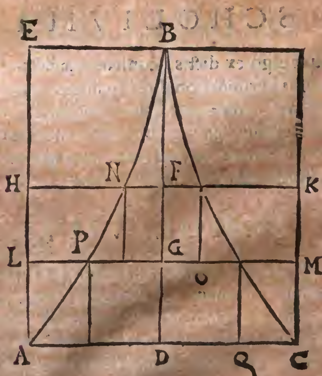
Patet ergo ex dictis, conicos prædictos esse magnitudines proportionaliter analogas cum supradictis trilineis. Item prædictos annulos strictos ortos ex reuolutione semiparabolarum circa ipsas tangentes in vertice, esse magnitudines proportionaliter analogas cum prædictis parabolis.

SCHOLIVM II.

Patet etiam quomodo ex hac proposit. non modo habeamus rationem cylindrorum circumscriptorum infinitis conicis, & infinitis annulis prædictis, ad ipsos; sed etiam rationem cylindrorum circumscriptorum omnibus frustis prædictorum solidorum resectorum planis basi parallelis, ad ipsa. Sed hæc sunt diligentius explicanda.

Habemus ergo in primis rationem cylindrorum circumscriptorum infinitis conicis, ad ipsos. Nam ex dictis in proposit. pri. lib. pri. habemus quadraturas infinitorum trilineorum; nimirum quod parallelogramma ipsis circumscripta, sint ad ipsa vt numerus trilinei vnitate auctus, ad vnitatem. Ergo & cylindrus circumscriptus cuilibet conico, erit ad ipsum, vt numerus trilinei, cuius exponens sit duplus exponentis conici vnitate auctus, nempe vt duplus numerus conici vnitate auctus, ad vnitatem. Quæ

Tt con-



concordant cum dictis in ſchol. 3. propoſit. 14. ſecundi libri.

Habemus ſecundo rationem cylindrorum circumſcriptorum infinitis fruſtis conicis reſectis plano baſi parallelo. Nam ex propoſit. 9. pri. lib. habemus, parallelogrammum L D, circumſcriptum cuilibet trapezio A P G D, eſſe ad ipſum, vt D B, accepta ſecundum numerum trilinei vnitate auctum, ad eandem D B, & ad G B, diametrum trilinei ad verticem, vna cum tot cæteris harum continuè proportionalibus, vt numerus omnium excedat nume-

rum

rum trilinei vnitate. Quæ concordant cum dictis in schol. 3. proposit. 14. 2. lib. In hoc enim scholio ostenditur cylindrum circumscriptum frusto conico, esse ad ipsum, vt tot diametri conici, cuius est frustum, vt earum numerus accipiatur secundum duplum numerum conici vnitate auctum, ad tot continuè proportionales quot sunt tales diametri, & quarum prima maior sit diameter DB, secunda diameter GB, nempe diameter conici ad verticem.

Habemus tertio rationem, quam habet cylindrus EC, ad annulos strictos infinitos ex semiparabolis EBA, circa BD, genitos. Nam ex proposit. 1. lib. 1. habemus parallelogrammum ED, esse ad semiparabolam EBA, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolæ: cumque numerus parabolæ supponatur duplus numeri annuli, sicuti etiam numerus trilinei supponitur duplus numeri conici; erit parallelogrammum ED, ad semiparabolam EBA, vt duplus numerus conici, seù annuli vnitate auctus, ad duplum numerum conici, seù annuli. Ergo & cylindrus EC, erit ad prædictum annulum ex EBA, circa BD, vt duplus numerus conici, seù annuli vnitate auctus ad duplum numerum annuli: nempe vt numerus annuli auctus dimidia vnitate, ad numerum annuli. Quæ concordant cum dictis in sec. parte prop. 14. sec. libri.

Habemus 4. rationem, quam habet v. g. cylindrus HC, ad frustum annuli ex portione HNA,

reuoluta circa BD. Ratio eſt, quia cum habeamus ex propoſit.9. pri.lib. per conuerſionem rationis, rationem parallelogrammi HD, ad portionem parabolæ HNA; nempe quod ſit vt DB, accepta ſecundum numerum trilinei, ſeù parabolæ vnitate auctum, ad exceſſum ipſius ſupra DB, BF, & cæteras tot proportionales vt pariter earum numerus excedat numerum trilinei vnitate; erit etiam cylindrus HC, ad prædictum annulum in eadem ratione: nempe erit in conico vt tot DB, quotus eſt duplus numerus conici vnitate auctus, ad exceſſum ipſarum ſupra DB, BF, & cæteras tot proportionales quot ſunt ipſæ. Quæ concordant cum ſchol. 4. propoſit. 14. lib. 2. arguendo per conuerſionem rationis.

Habemus quinto rationem cuiuslibet cylindri intermedij HM, ad annulum latum ex ſegmento intermedio HNPL, circa BD. Quia ex propoſit. 12. prim. huius, habemus rationem parallelogrammi HG, in parabola, ad ſegmentum HNPL. Hæc autem cum ſit eadem cum ea, quam habet DB, accepta ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad exceſſum ipſius ſupra tot numero proportionales in rationem GB, ad BF, quarum prima maxima, ſit vltima minima proportionis DB, ad BG, continuatæ in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate; erit etiam cylindrus HM, ad annulum latum ex ſegmento HNPL, circa BD, vt DB, accepta ſecundum

duplum

duplum numerum annuli vnitate auctum, ad excessum ipsius supra tot numero proportionales in ratione GB, ad BF, in conico, quarum maxima sit minima proportionis DB, ad BG, continuatæ in tot terminos, vt numerus eorum sit duplus vnitate auctus numeri conici, seù annuli.

Habemus sexto rationem cylindri Ek, ad annulum strictum ex segmentō EBNH, circa BD. Nam cum ex proposit. 10. prim. sit parallelogrammum EF, ad segmentum ad diametrum EBNH, vt DB, accepta secundum numerum parabolæ vnitate

tate

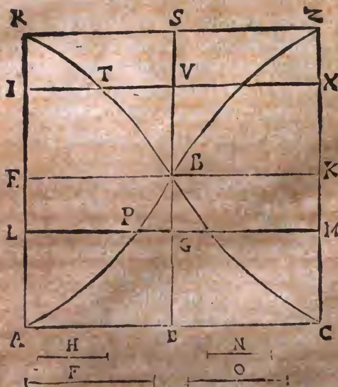
tate auctum, ad excessum ipsius supra vltimam minorem proportionalem proportionis DB, ad BF, continuatæ in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ vnitate; ergo etiam cylindrus EK, erit ad prædictum annulum, vt DB, accepta secundum duplum numerum conici, seù annuli vnitate auctum, ad excessum ipsius supra vltimam minorem proportionalem proportionis DB, ad BF, continuatæ in tot terminos vt numerus eorum sit duplus vnitate auctus numeri conici, seù annuli.

SCHOLIVM III.

Sed non solum ea, quæ vsque modo dicta sunt verificantur, sed etiam, ex dictis, alia possunt colligi; nempe non modo eandem esse rationem cylindri EC, ad annulum strictum ex semiparabola EBA, circa BD, reuoluta, cum ratione parallelogrammi ED, ad semiparabolam EBA, cuius exponens sit duplus exponentis prioris semiparabolæ, & hoc tam secundum totum, quam secundum partes proportionales; verum etiam completis integris parabolis, & duplicatis trilineis, parallelogrammis, conicis, & cær. eandem esse rationem (vt manifeste patet) parallelogrammi ad duos trilineos, tam secundum totum, quam secundum partes proportionales, ac cylindri, ad duos conicos. Item, eandem esse rationem parallelogrammi ad integram parabolam tam

tam ſecundum totum, quam ſecundum partes proportionales, ac totius cylindri ad annulum ſtrictum ex tota parabola: & conſequenter tam totum annulum eſſe magnitudinem proportionaliter analogam cum tota parabola, quam duos conicos inuersè poſitos, eſſe magnitudines proportionaliter analogas cum duobus trilineis itidem inuersè poſitis. Ex quibus.

Habemus primo, quod ſi diuiſis SD, proportionaliter in G, & in cylindro ducto plano LGM, ADC, parallelo, in parallelogrammo vero ducta LG, AD, parallela; habebimus rationem cylindri RM, ad annulum ſtrictum ex maiori portione RBPL, reuoluta circa SD. Nam ex propoſit. 13. lib. 1. facile deducemus, cylindrum RM, eſſe ad prædictum annulum, vt SG, accepta ſecundum duplum numerum annuli vnitate auctum, ad SG, acceptam ſecundum duplum numerum annuli, vna cum exceſſu BG, ſupra vltimam minorem proportionalem proportionis SB, ad BG, continuatæ in tot terminos, vt eorum numerus excedat duplum numerum annuli binario. Patet, quia loco citato probatum eſt, parallelogrammum RG, eſſe ad portionem maiorem parabolæ RBPL, vt SG, accepta ſecundum numerum parabolæ vnitate auctum, ad SG, acceptam ſecundum numerum parabolæ, vna cum exceſſu BG, ſupra vltimam minorem proportionalem proportionis SB, ad BG, continuatæ in tot



in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum parabolæ binario.

Habemus secundo, quod si ductis plano ITVX, & linea ITV, parallelis vt supra, secantibus pariter SD, proportionaliter in V; habebimus rationem cylindri IM, ad annulum strictum ex segmento ITBPL, reuoluto circa SD. Hæc autem sic obtinebitur. Fiat vt VB, ad BG, sic SB, ad F; ratio verò SB, ad BV, continuetur in tot

tot terminos vt numerus eorum excedat duplum numerum annuli vnitate, ſitque vltimus minimus terminus H. Eodem modo continuetur ratio DB, ad BG, ſitque vltimus minimus terminus N. Tandem fiat vt tot SB, quotus eſt duplus numerus annuli vnitate auctus, ad exceſſum ipſarum ſupra N, ſic F, accepta ſecundum duplum numerum annuli vnitate auctum, ad O. Ex propoſit. 14. lib prim. haurietur, eſſe cylindrum IM, ad prædictum ſegmentum annuli, quod includit, vt F, cum SB, acceptis ambabus ſecundum duplum numerum annuli vnitate auctum, ad O, vna cum exceſſu tot SB, quotus eſt duplus numerus annuli vnitate auctus ſupra H.

SCHOLIVM IV.

Sed hic libet lectori conſiderandum proponere accidens quodam circa hęc ſolida contingens, quod vtique nobis videtur admirabile, & conſideratione dignum. Non eſt difficultas, quod quot ſunt parabolæ, tot ſunt & trilinea, & conoidea, & conici: Vel vt melius fortaſſis loquamur, cuilibet parabolæ, correſpondent ſuum conoides, ſuum trilineum, & ſuus conicus. Quapropter, cùm ad menſuranda infinita conoidea, adhibitæ ſint ipſæmet infinitæ parabolæ, quæ tot ſunt, quot ſunt ipſa conoidea; vtique ex analogia infinitarum parabolarum, nempe ex proportione parallelogrammi circumſcripti infinitis

Vu para-

parabolis ad ipſas, videtur conueniens eſſe colligere proportionem cylindri circumſcripti omnibus conoidibus parabolicis, ad ipſa conoidea. Quod attamen ex ſuperioribus patuit haud verificari. Nam ex proportione parallelogrammi ad infinitas parabolas, non elicimus niſi proportionem cylindrorum ad omnia conoidea, quorum exponentes ſint numeri pares: adeout inter quælibet duo conoidea, quorum analogia aſſignatur, mediet conoides. Verum enim vero quamuis eodem modo ſe videantur haberi infinitæ parabolæ reſpectu infinitorum conoideorum, ſicuti infinita trilinea reſpectu infinitorum conicorum, quia ex reuolutione infinitarum parabolarum, & infinitorum trilineorum oriuntur infinita conoidea, & infiniti conici; attamen non eodem modo ex proportione parallelogrammi ad plana, elicimus analogiam proportionis cylindri ad ſolida. Nam ex proportione omnium parallelogrammorum ad infinitas parabolas, non colligimus niſi rationem cylindrorum ad aliqua conoidea; in præſenti vero propoſit. ex proportione parallelogrammorum ad aliqua tantum trilinea, nempe ad ea, quorum exponentes ſunt numeri pares, elicimus analogiam proportionis infinitorum cylindrorum ad infinitos conicos. At quod vſque modo videbatur admirabile, videbitur admirabilius, ſi conſideretur hanc diuerſitatem reperiri etiam in ſolidis genitis ex reuolutionibus diuerſis earundem numero figurarum. Nam ex infinitis parabolis rotatis circa diametros, generantur infinita

finita conoidea; ex ijſdem vero rotatis circa ipſas in vertice tangentes, oriuntur infiniti annuli ſtricti. Modo ſi adhibeamus proportionem, quæ reperitur inter parallelogramma & infinitas parabolas, non poſſumus aſſignare niſi rationem cylindrorum ad conoidea, quorum exponentes ſint numeri pares: at vice verſa, adhibendo proportionem, quæ reperitur inter parallelogramma, & parabolas, quarum exponentes ſint numeri pares, elicimus proportionem cylindrorum ad infinitos annulos prædictos. Sed hæc & ſimilia, ſunt de numero illorum mirabilium, de quibus loquitur Galileus in poſtremis Dialogis, Dial.p. pag. apud nos, 24.

SCHOLIVM V.

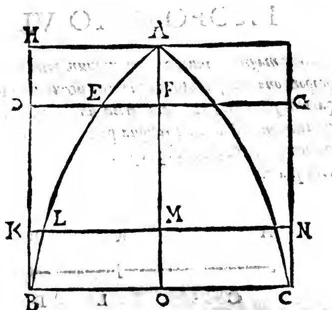
Initio huiuſce operis, ſuppoſuimus infinitarum parabolarum quadraturam aſſignatam à Caualerio per indiuiſibilia. Reliqua omnia, vſque modo oſtenſa, methodo antiquorum proceſſere. Sed ex vſque modo dictis, poſſumus deducere, methodo antiquorum, quadraturam omnium illarum parabolarum, quarum exponentes conſtituunt progreſſionem duplam, ab vnitate incluſiuè, incipientem: nempe, quarum exponentes ſunt 1. 2. 4. 8. 16. 32. &c. Quod ſic patebit. Nam parabolas, quarum exponentes ſunt 1. & 2. nempe triangulum & parabolam quadraticam, more antiquorum quadrari, etiam modicè in geometria verſatis, patet. De alijs ſic pate-

bit. Data parabolæ quadraticæ quadratura, habetur ratio cylindri circumscripti conico quadratico ad ipsum. Habita hac, habetur etiam ratio parallelogrammi ex proposit. antec. circumscripti trilineo quadratoquadratico, cuius exponens 4. ad ipsum. Hac obtenta, obtinetur etiam ratio cylindri circumscripti conico ex ipso, ad ipsum conicum. Ex hac deducitur ratio parallelogrammi circumscripti trilineo, cuius exponens 8. ad ipsum. Et consequenter ratio cylindri ad conicum. Ex qua ratione hauritur ratio parallelogrammi ad trilineum, cuius exponens 16. Et sic in infinitum.

PROPOSITIO V.

Si parabolæ quadraticæ sit circumscriptum parallelogrammum, quod cum ipsa secetur duabus lineis basi parallelis, æqualiter distantibus, vna à vertice, altera à basi. Rectangulum contentum sub partibus vnius resectæ à curua parabolica, erit æquale quadrato dimidiæ alterius ordinatim applicatæ ad diametrum parabolæ.

HOc idem ostenditur à nobis in nostro libello Venetijs impresso, cuius titulus. Sexaginta problemata Geometrica, in appendice pro indiuisibilibus. Sit ergo parabola quadratica BAC, cui sit circumscriptum parallelogrammum HC, quod cum parabola sit sectum duabus DG, kN, ipsi BC, parallelis, tali lege, vt AF, MO sint æquales.

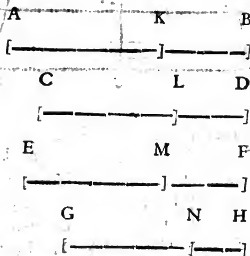


les. Dico rectangulum DEG, æquale esse quadrato LM; vicissimque rectangulum kLN, æquale esse quadrato EF. Quoniam enim ex schol. proposit. 21. lib. prim. quadratum BO, seu DF, æquatur quadratis EF, LM, & pariter æquatur quadrato EF, & rectangulo DEG; ergo quadrata EF, LM, æquabuntur rectangulo DEG, & quadrato EF. Quo ablato hinc inde. Ergo rectangulum DEG, erit æquale quadrato LM. Eodem modo ostendetur rectangulum kLN, æquari quadrato EF. Quare patet propositum.

PRO-

PROPOSITIO VI.

Si quatuor magnitudinum proportionalium prima, & tertia proportionaliter secentur in puncto, sitque pars primæ ad partem secundæ, vt pars tertiæ similis parti primæ ad partem quartæ. Erit reliqua pars primæ ad reliquam partem secundæ, vt reliqua pars tertiæ ad reliquam partem quartæ.



SInt quatuor magnitudines proportionales, AB, prima, CD, secunda, EF, tertia, & GH, quarta, vt sit AB, ad CD, vt EF, ad GH; sintque AB, prima, & EF, tertia sectæ proportionaliter in k, & M, vt AB, sit ad BK, vt EF, ad FM; pariter CD, GH, sint sectæ in L, N,

E, N, vt sit kB, ad LD, vt MF, ad NH. Dico Ak, esse ad CL, vt EM, ad GN. Quoniam ex hypothesi, est conuertendo, CD, ad AB, vt GH, ad EF; & AB, ad BK, vt EF, ad FM; & kB, ad LD, vt MF, ad NH. Ergo ex æquali, erit diuidendo, CL, ad LD, vt GN, ad NH.

Rursum quoniam ex hypothesi conuertendo, vt LD, ad kB, sic NH, ad MF, & pariter ex hypothesi diuidendo, & conuertendo, est BK, ad kA, vt FM, ad ME. Ergo pariter ex æquali, erit CL, ad AK, vt GN, ad EM. Conuertendoque, erit Ak, ad CL, vt EM, ad GN. Quod, &c.

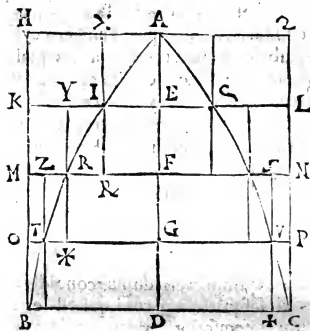
PROPOSITIO VII.

Excessus cylindri circumscripti conoidi parabolico quadratico supra ipsum, æquatur ipsi conoidi. Quodlibetue segmentum talis excessus resecti plano, vel planis basi parallelis, æquatur segmento eiusdem conoidis inuersè positi, ac contento inter eadem plana.

ESto conoides parabolicum BAC, cui sit circumscriptus cylindrus HC. Dico primo, excessum cylindri supra conoides æquari conoidi. Secta diametro DA, in quotcumque partes æquales AE, EF, FG, GD, &c. per puncta E, F, G, transeant plana kL, MN, OP, ipsi BDC, parallela; super

ſuper baſi autem I E Q, intelligantur cylindri X Q, Q ℞; item ſuper baſi R F S, cylindri S Y, S ✳; pariterque ſuper baſi T G V, cylindri V Z, T ✠. Patet, in exceſſu cylindri ſupra conoides, inſcriptos eſſe tubos, cylindricos ſibi ſuper impoſitos ortos ex reuolutione parallelogrammorum k X, K R, M T, circa A D: item in conoide, inſcriptos eſſe cylindros Q ℞, S ✳, T ✠, vt in ſchemate, tot numero quot ſunt tubi inſcripti in exceſſu. Tunc, quoniam A E, æquatur D G; ergo ex propoſit. antec. rectangulum k I L, erit æquale quadrato T G. Ergo & armilla circularis, cuius latitudo k I, erit æqualis circulo, cuius ſemidiameter T G. Ergo tubus cylindricus k X L, inſcriptus in exceſſu erit æqualis cylindro T ✠, inſcripto in conoide, quia & baſes, & altitudines horum ſolidorum ſunt æquales. Eodem modo oſtendetur tubum M Y N, æquari cylindro S ✳: itemque tubum O Z P, æquari cylindro Q ℞: & idem oſtenderetur de omnibus alijs, quia ſunt æquales numero, dummodo tubus, qui comparatur cum cylindro, æqualiter diſtet ab A, ſicuti cylindrus à D. Ergo omnes tubi inſcripti in exceſſu, erunt ęquales omnibus cylindris inſcriptis in conoide. Ergo & exceſſus erit æqualis conoidi. Nam cum per continuatam biſectionem, & ſubiſectionem A D, partiumque eiuſdem, poſſint, more vſitato apud geometras, inſcribi in exceſſu tot tubi cylindrici, in conoide vero tot cylindri, vt illi quidem ab exceſſu, hi vero à conoide, defficiant quantitate

minori



minori quacumque data, facile probabitur absurdum si aliter dicatur quam nos dicimus. Excessus ergo prædictus, erit æqualis conoidi. Quare patet primum.

Dico secundo, quod si A E, sit æqualis G D, adeo vt si conoides inuerse poneretur, segmentum B T V C, contineretur inter plana H 2, k L; nihilominus excessum cylindri H L, supra conoides I A Q, æquari segmento conoidis B T V C. Nam diuidendo A E, in quotlibet partes, & G D, in tot ipsis in A E, numero æquales, & per puncta A E, G D, ductis planis B D C, parallelis; modo supra exposito, in excessu k A L, inscriberentur tu-

Xx bi

bi cylindrici, in ſegmento vero B T V C, cylindri; tubique cylindrici eſſent æquales numero cylindris; & omnes tubi cylindrici probarentur æquales omnibus cylindris, comparando ſemper tubum æqualiter diſtantem ab A, cum cylindro æqualiter diſtante à D. Vnde etiam, more vſitato apud geometras, per deductionem ad impoſſibile oſtenderetur, exceſſum prædictum K A L, æquari ſegmento B T V C. Quare patet etiam ſecundum.

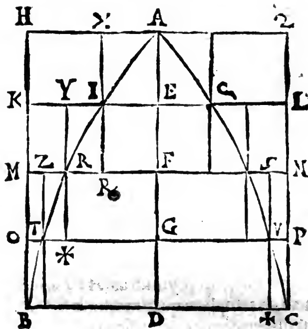
COROLLARIVM.

Ergo totus cylindrus erit duplus conoidis. Ergo conoides erit ſeſquialterum coni qui eſt tertia pars cylindri ſibi circumſcripti. Ergo conoides erit ſubſeſquitertium hemiſphærij, ſeù hemiſphæroidis inſcripti in eodem cylindro H C. Quæ omnia concordant cum doctrinis Archimedis, & aliorum.

SCHOLIVM.

Pátet ergo ex dictis in hac, & ſuperioribus propoſit. exceſſum prædictum cylindri ſupra conoides, ipſumque conoides, eſſe magnitudines proportionaliter analogas, iuxta ſenſum definitionis ſupra poſitæ.

Ad vberriorem autem doctrinam notetur, quod cum in ſchol. 2. propoſit. 15 lib. 2. vniuerſaliter aſſignata ſit ratio, quam habet cylindrus v. g. O C, ad fru-



fruſtum BTVC, conoidis cuiuſcumque paraboli-ci à sè incluſi quæ in conoide quadratico, vt ex regu-la generali ibidem tradita elicitur, eſt eadem cum ea, quam habent duæ BD, cum duabus TG, nem-pe BC, cum TV, ad BD, TG, cum alijs duabus ſequentibus in continua proportione BD, ad TG; & cum (ſupponendo AE, GD, æquales eſſe) pro-batum ſit, exceſſum cylindri HL, ſupra IAQ, æ-qualem eſſe ſegmento BTVC, & pariter cylin-drus HL, ſit æqualis cylindro OC: ſequitur e-tiam, cylindrum HL, eſſe ad exceſſum ipſius ſu-pra conoides IAQ, vt BC, TV, ad BD, TG, cum illis duabus proportionalibus. Ex quibus patet

per conuerſionem rationis, quænam ſit ratio cylindri HL, ad conoides IAQ.

Sed etiam ad vberriorem ſcientiam, licet in conoide parabolico quadratico aliam rationem cylindri OC, ad fruſtum BTVC, colligere. Nimirum, quod ſit vt dupla DA, ad DA, cum AG, ſeù vt duplum quadratum BD, ad quadrata BD, TG. Quod ſic patebit. Cylindrus HL, ad cylindrum XQ, eſt vt quadratum KE, ad quadratum EI; nempe vt duplum quadratum kE, ad duplum quadratum EI. Cylindrus XQ, eſt ad conoides IAQ, vt duplum quadratum IE, ad quadratum IE. Ergo ex æquali, cylindrus HL, erit ad conoides IAQ, vt duplum quadratum kE, ad quadratum IE. Ergo & per conuerſionem rationis, cylindrus HL, erit ad exceſſum ipſius ſupra conoides, vt duplum quadratum kE, ad exceſſum ipſius ſupra quadratum IE. Quare & cylindrus OC, æqualis HL (ſuppoſitis AE, GD, æqualibus) erit ad ſegmentum BTVC, æquale prædicto exceſſui, vt duo quadrata kE, ſeù BD, ad exceſſum ipſorum ſupra quadratum IE; nempe ad quadrata BD, TG; quia quadrata IE, TG, ęqualia ſunt quadrato BD. Cum autem ſit vt quadratum BD, ad quadratum TG, ſic DA, ad AG. Ergo & vt duo quadrata BD, ad quadrata BD, TG, ſic dupla DA, ad DA, AG. Patet ergo in omnibus, & per omnia, propoſitum.

PRO.

PROPOSITIO VIII.

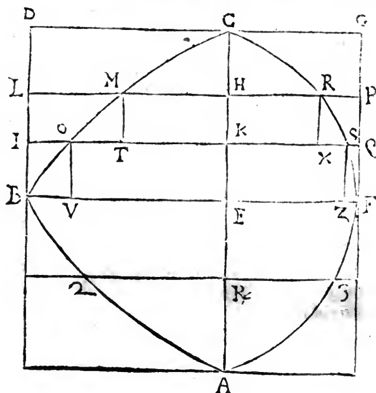
Parallelogrammum circumſcriptum parabolæ quadraticæ, eſt ad ipſam, vt cylindrus circumſcriptus ſphæræ, vel ſphæroidi ad ſphæram, vel ſphæroides, tam ſecundum totum, quam ſecundum partes proportionales; ſi diameter ſphæræ vel ſphæroidis, & baſis parabolæ ſecentur in partes proportionales.

ESto parabola ABC, cum ſibi circumſcripto parallelogrammo DA, ſitque eius baſis CA; item ſit ſemicirculus, vel ſemiellipſis CFA (ſiue CA, diameter ipſius ſit æqualis baſi CA, parabolæ, ſiue non, nam ponitur eadem facilitatis gratia) cum ſibi circumſcripto rectangulo GA; & intelligamus ipſum cum ſemicirculo, vel ſemiellipſi rotari circa CA. Dico parallelogrammum DA, eſſe ad parabolam ABC, vt cylindrus ex GA, ad ſphæram, vel ſphæroides, (quod ſemper debet intelligi) ex CFA. Pariter dico ſi CA, ſecetur proportionaliter, & in parabola, & parallelogrammo ducantur lineæ BE, parallelæ, & in ſphæra ducentur plana parallela circulo deſcripto à ſemidiametro EF; ſemper parallelogrammum, & parabolam; itemque ſphæram, & cylindrum, ſecari in partes proportionales. Hoc oſtendetur primo in ſemiparabola EBC, & in hemiſphærio ex CFE. Diuidantur CE, ſemibaſis parabolæ, & ſemidiameter circuli proportionaliter in

punctis

punctis H, k, &c. & in parabola ducantur HL, KI, BE, parallelæ, in semicirculo vero HP, kQ, EF, parallelæ: item ducentur MT, OV, RX, SZ, CA, parallelæ, vt apparet in schemate. Tunc. Quoniam in parabola est ex coroll. proposit. 22. p. rectangulum AEC, ad rectangulum AkC, vt BE, ad Ok, seù ad VE; hoc est vt parallelogrammum Bk, ad parallelogrammum Vk; estque vt rectangulum AEC, in parabola, ad rectangulum AkC, sic rectangulum AEC, in sphæra, vel sphæroide, ad rectangulum AkC; & vt rectangulum AEC, ad rectangulum AkC, sic ex Apollon. p. conic. proposit. 21. quadratum EF, ad quadratum kS, seù EZ; & vt quadratum EF, ad quadratum EZ, sic cylindrus ex parallelogrammo EQ, circa CA, ad cylindrum ex ES, circa eandem. Ergo & vt parallelogrammum BK, ad parallelogrammum Vk, sic cylindrus ex EQ, ad cylindrum ex ES. Eodem modo ostendetur, esse parallelogrammum IH, ad parallelogrammum TH, vt cylindrus ex kP, ad cylindrum ex KR; idemque ostenderetur de alijs, si adessent. Ergo ad modum superiorum facile concludemus, parallelogrammum DE, esse ad parallelogramma in semiparabola inscripta, vt cylindrus ex EG, ad omnes cylindros in hemisphærio inscriptos. Quare etiam modo Archimedeo facile concludemus, esse DE, ad EBC, semiparabolam, vt cylindrus ex EG, ad ipsum hemisphærium, seù hemisphæroides. Possumus enim in semiparabola,

& in



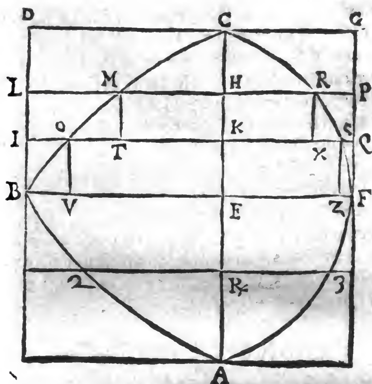
& in hemiſphærio inſcribere figuras conſtantes ex parallelogrammis, & cylindris, defficientes ab ipſis deffectu quacumque data magnitudine minori. Cum autem ſit parallelogrammum D E, ad ſemiparabolam BCE, vt cylindrus ex CF, ad hemiſphærium, ſeù hemiſphæroides ex C F E; erit etiam vt parallelogrammum D A, ad parabolam ABC, ſic cylindrus ex A G, ad ſphæram, ſeù ſphæroides ex C F A.

Probabimus ſecundo, parallelogrammum v. g. L E,

LE, esse ad FBMH, segmentum parabolæ ad diametrum, vt cylindrus ex HF, ad segmentum ex HRFE; (supponendo HE, esse partes proportionales CA, basis parabolæ, & diametri circuli, & ellipsis, quod semper debet intelligi.) Demonstratio autem non erit diuersa à supra posita; quia secando HE, in punctis proportionaliter, & faciendo priorem constructionem: nihilominus probabimus parallelogrammum LE, esse ad omnia parallelogramma in segmento EBMH, inscripta, vt cylindrus ex HF, ad cylindros ex parallelogrammis in HRFE, inscriptis. Et tandem probabimus modo Archimedeo, LE, esse ad segmentum ipsum, vt cylindrus ex HF, ad segmentum sphæræ ex segmento HRFE.

Non aliter demonstrabitur esse Lk, ad segmentum intermedium kOMH, vt cylindrus ex HQ, ad segmentum ex segmento HRSk. Quod etiam probari potest ex proposit. anteced. Quia cum sit vt LE, prima ad EBMH, secundam, sic tertia cylindrus ex HF, ad quartam segmentum ex segmento HRFE; & cum prima, LE, & tertia cylindrus ex HF, supponantur sectæ proportionaliter (nam debet supponi esse LE, ad Lk, vt cylindrus ex HF, ad cylindrum ex HQ) itemque sit LE, ad segmentum ad diametrum EBOK, vt cylindrus ex KF, ad segmentum ex segmento KSFE. Erit & LK, ad KOMH, vt cylindrus ex HQ, ad segmentum ex segmento HRSk.

Eodem



Eodem modo patebit, esse DH, ad HMC, vt cylindrus ex CP, ad portionem ex portione CRH. Nam DE, est ad EBC, vt cylindrus ex CF, ad hemisphærium: item LE, est ad EBMH, vt cylindrus ex HF, ad segmentum ex segmento HRFE (supponi autem debet esse ED, ad DH, vt cylindrus ex EG, ad cylindrum ex CP.) Quare DH, erit ad HMC, vt cylindrus ex CP, ad portionem ex portione CRH.

Pariter, cum sit DA, ad parabolam, vt cylin-

 drus

drus ex A G, ad ſphæram : item D H, ad H M C, vt cylindrus ex C P, ad portionem ex portione C R H. Si ſupponatur D A, ad A L, vt cylindrus ex A G, ad cylindrum ex A P, erit L A, ad portionem maiorem A B M H, vt cylindrus ex AP, ad portionem ex portione H R F A.

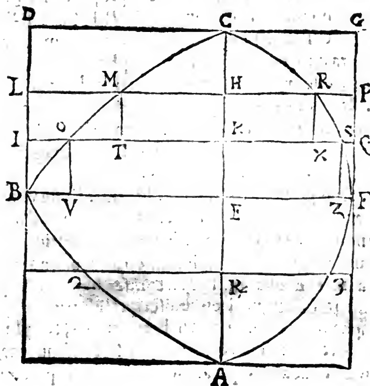
Quod ſi iterum, C A, baſis, & diameter ſecentur proportionaliter in ℞, & ducantur parallelæ, vt prius: faciliter ex dictis probabitur, L ℞, eſſe ad ſegmentum ℞ 2 M H, vt cylindrus ex ℞ P, ad ſegmentum ex ſegmento H R 3 ℞. Patet ergo omnibus modis probatum eſſe, D A, eſſe ad parabolam, tam ſecundum totum, quam ſecundum partes proportionales, vt cylindrus ex A G, ad ſphæram, vel ſphæroides. Quod &c.

COROLLARIVM.

Ergo & per conuerſionem rationis, erit D A, ad exceſſum ipſius ſupra parabolam, nempe ad trilinea; vt cylindrus ex A G, ad exceſſum ipſius ſupra ſphæram, vel ſphæroides, & hoc tam ſecundum totum, quam ſecundum partes proportionales.

SCHOLIVM I.

Patet ergo ex dictis, ad modum ſuperiorum concludi poſſe, parabolam quadratam [illegible]
ſph[illegible]



logas iuxta ſenſum definitionis ſupra expoſitæ. Item cum eliciatur ex ſchol. pri. propoſit. 4. huius, ſemiparabolam quadraticam eſſe magnitudinem proportionaliter analogam, cum exceſſu cylindri ſupra ſuum conum; vnde ex dictis ibidem, facile poſſit elici, totam parabolam quadraticam, eſſe magnitudinem proportionaliter analogam cum exceſſu cylindri R C, in ſchemate illius propoſit. pagina 336. ſupra duos conos R B Z, A B C, & duo trilinea, nempe exceſſum parallelogrammi ſupra parabolam

quadraticam, esse magnitudinem proportionaliter analogam cum ipsis duobus conis RBZ, ABC; sequitur concludi posse, excessum prædictum cylindri supra duos conos, parabolam, sphæram, & sphæroides, esse magnitudines proportionaliter analogas. Item duos conos prædictos, duo trilinea quadratica, & excessum cylindri circumscripti sphæræ, vel sphæroidi, supra hæc solida, esse pariter magnitudines proportionaliter analogas.

Patet ergo ex dictis, qualiter habita ratione vnius ex prædictis magnitudinibus circumscriptis, ad magnitudinem, cui circumscribitur, detur ratio reliquarum magnitudinum circumscriptarum, ad magnitudines reliquas quibus circumscribuntur. V. g. si detur ratio cylindri circumscripti sphæræ, ad ipsam sphæram; statim patet haberi rationes, & cylindri ad excessum supra duos conos, & consequenter ad ipsos conos; & parallelogrammi, ad parabolam, &c.

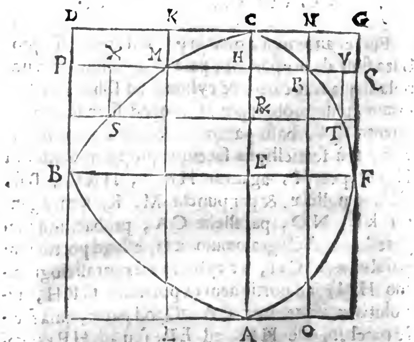
Item patet qualiter ex vniuersalissima doctrina, probatum remaneat id, quod Lucas Valerius, & nonnulli alij particulariter probant. Nimirum, excessum cylindri supra conum, esse æqualem hemisphærio, seù hemisphæroidi in cylindro inscripto. Assertum autem hoc patebit vnicuique consideranti, eundem cylindrum circumscribere hæc solida, & ad ipsa eandem habere rationem. Hoc vero, patet ex dictis, verificari tam secundum totum, quam secundum partes proportionales.

SCHO-

SCHOLIVM II.

Præter autem ea, quæ in præsenti proposit. probata sunt de proportione parallelogrammi ad parabolam quadraticam, & cylindri ad sphæram, &c. etiam facile probari potest, quod si in schem. sequenti, CA, basis parabolæ, & diameter semicirculi, seù semiellipsis secentur proportionaliter in H, & per H, agantur HMP, HRQ, BE, EF, parallelæ, & per puncta M, R, item agantur kL, NO, parallelæ CA; probari inquam potest, parallelogrammum kH, esse ad portionem parabolæ MCH, vt cylindrus ex parallelogrammo HN, ad portionem ex portione CRH, reuolutis vtrisque circa CA. Quod patet, quia facile patebit, esse HM, ad EB, seù ad HP; nempe parallelogrammum Hk, ad HD, vt quadratum HR, ad quadratum EF, seù ad quadratum HQ; nempe vt cylindrus ex parallelogrammo HN, ad cylindrum ex parallelogrammo HG. At supra probatum est, DH, esse ad MCH, vt cylindrus ex HG, ad portionem ex portione CRH. Ergo ex æquali, erit kH, ad MCH, vt cylindrus ex HN, ad portionem ex CRH. Eodem modo probabitur esse LH, ad portionem HMBA, vt cylindrus ex HO, ad portionem ex portione HRFA.

Item probari potest, quod si secta HE, proportiona-



tionaliter in ℞, agantur ℞S, ℞T, parallelæ BE, EF; item SX, TV, parallelæ CA: probari inquam poteſt, SH, eſſe ad ſegmentum intermedium ℞SMH; vt cylindrus ex ℞V, ad ſegmentum ex ſegmento ℞TRH. Quam verò fæcunda ſit doctrina ſupra expoſita, & quot poſſint deduci ex his, & ex traditis in primo libro, patebit in propoſit. ſequenti, in qua quamplurima explicabuntur circa partes ſphæræ, & ſphæroidis. Ex quibus patebunt quamplurima, quæ traduntur ſparſim ab Archi-

chimede, à Luca Valerio, à Caualerio, à Riccardo Albio, & ab alijs authoribus.

PROPOSITIO IX.

Rationes cylindrorum ad varia segmenta sphæræ, vel sphæroidis assignare.

OMnia, quæ in hac propositione tradentur, potuissent vtique proponi per modum theorematum, sed breuitatis gratia, statuimus ipsa sic exponere.

Esto hemisphærium, vel hemisphæroides BCF, cui sit circumscriptus cylindrus GF; qui cum hemisphærio, vel hemisphæroide sit sectus plano MQ, parallelo BF, plano, & fiat vt CE, ad EO, sic EO, ad R.

Dico primo, cylindrum GQ, esse ad portionem NCP, vt tripla CE, ad excessum ipsius supra CE, EO, & R. Intelligamus CFE, nobis representare semiparabolam quadraticam, cuius basis CE; diameter EF; vertex F; & parallelogrammum ipsi circumscriptum sit CF, quod cum semiparabola sit sectum linea OPQ, diametro EF, parallela. Ergo ex proposit. anteced. erit parallelogrammum CQ, ad trapezium CLQP, vt cylindrus GQ, ad excessum ipsius supra portionem NCP; Sed [illegible] prim. [illegible]

ad trapezium CLQP, vt tripla CE, ad CE, EO, & R. Ergo etiam cylindrus GQ, erit ad excessum ipsius supra portionem NCP, vt tripla CE, ad CE, EO, & R. Ergo & per conuersionem rationis, erit cylindrus GQ, ad ipsam portionem NCP, vt tripla CE, ad excessum ipsius supra CE, EO, & R. Quod &c.

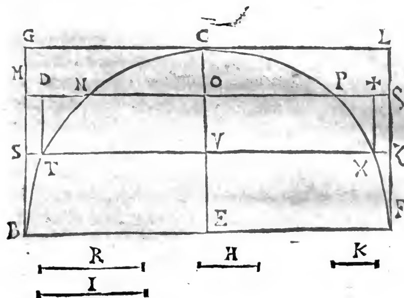
Dico secundo, prædictum cylindrum esse ad prędictam portionem NCP, vt quadratum CE, ad rectangulum COE, cum duobus tertijs quadrati CO. Cum enim probatum sit GQ, esse ad excessum ipsius supra portionem NCP, vt tripla CE, ad CE, EO, & R. Ergo ducendo omnia in CE, erit GQ, ad prædictum excessum, vt triplum quadratum CE, ad quadratum CE, cum rectangulo CEO, & cum rectangulo CE, R (nempe cum quadrato EO.) Ergo per conuersionem rationis, erit GQ, ad portionem NCP, vt triplum quadratum CE, ad excessum ipsius supra quadrata CE, EO, & supra rectangulum CEO. Ergo & vt tertiæ partes horum planorum; nempe vt quadratum CE, ad tertiam partem prædicti excessus. Sed tertia pars excessus prædicti, est æqualis rectangulo COE, & duobus tertijs quadrati CO, vt statim probabitur. Quare &c. Quod &c.

Assumptum sic patebit. Nam triplum quadratum CE, excedit quadrata CE, EO, & rectangulum CEO, tribus rectangulis COE, & duplo quadrato CO. Quorum tertia pars est rectangulum

COE,

COE, cum ſubſeſquialtero quadrati CO.

Dico tertio, quod conſtructis iiſdem, quæ ſupra, erit cylindrus MF, ad ſegmentum BNPF, vel vt tripla CE, ad duplam CE, vna cum exceſſu CE, ſupra R; vel vt CE, ad CO, cum duabus tertijs partibus OE, & cum tertia parte exceſſus OE, ſupra R. Ratio eſt, quia ex ſchol. prim. propoſit. 10. lib. prim. parallelogrammum EQ, eſt in parabola quadratica, ad ſegmentum EOPF, ad diametrum, in prædictis rationibus.

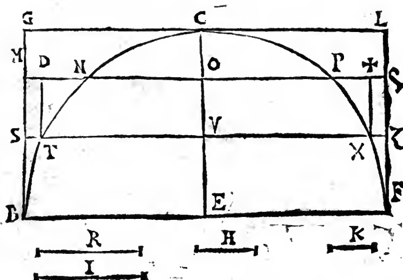


Dico quarto, eundem cylindrum MF, eſſe ad idem ſegmentum BNPF, vt triplum quadratum CE, ad duplum quadratum CE, vna cum rectangulis COE, ECO. Vel ſubtriplando terminos, vt quadratum CE, ad ſubſeſquialterum quadrati

CE, cum tertia parte rectangulorum COE, ECO. Ratio est, quia ex schol. ter. cit. proposit. est parallelogrammum EQ, ad segmentum ad diametrum EOPF, vt tripla EF, ad duplam EF, cum OP. Sed ex schol. proposit. 22. lib. prim. huius. Est EF, ad OP, vt quadratum CE, ad rectangula COE, ECO; vnde est vt tripla EF, ad duplam EF, cum OP, sic triplum quadratum CE, ad duplum quadratum CE, cum rectangulis COE, ECO. Ergo etiam cylindrus MF, erit ad segmentum BNPF, vt triplum quadratum CE, ad duplum quadratum CE, vna cum rectangulis COE, ECO. Quod &c.

Dico quinto, segmentum BNPF, æquale esse tribus conis, circa diametrum OE, quorum duorum sit basis BEF, alterius vero circulus NOP. Patet, quia cum probatum sit, cylindrum esse ad segmentum vt triplum quadratum EC, ad duplum quadratum EC, vna cum rectangulis COE, ECO; nempe vt triplum quadratum BE, ad duplum quadratum BE, vna cum quadrato NO; & cum sit vt triplum quadratum BE, ad duplum quadratum BE, vna cum quadrato NO, sic triplus conus, cuius basis BEF, axis OE, nempe cylindrus MF, ad duplum conum prædictum, vna cum cono, cuius basis NOP, axis OE. Ergo NF, ad illos conos & ad segmentum erit in eadem ratione. Ergo segmentum erit æquale prædictis conis.

Dico sexto, quod si cylindrus GF, secetur alio plano



plano SZ, BF, parallelo, & fiat vt CE, ad EO, ſic EO, ad R; & pariter fiat vt OE, ad EV, ſic R, ad H, & H, ad k. Erit cylindrus MZ, ad ſegmentum TNPX, vt tripla CE, ad exceſſum ipſius ſupra R, H, k. Ratio eſt quia ex ſchol. pri. propoſit. 12. lib. pri. huius, parallelogrammum VQ, eſt ad ſegmentum parabolæ VOPX, in prædicta ratione.

Dico ſeptimo, prædictum cylindrum, eſſe ad prędictum ſegmentum, vt quadratum CE, ad rectangula EOC, ECO, EVO, cum ſubſeſquialtero quadrati VO. Patet, quia conſideranti ſchol. ſec. præcit. propoſit. patebit parallelogrammum VQ, eſſe ad ſegmentum parabolæ OPXV, in prædicta ratione. Quare & cylindrus ad ſegmentum.

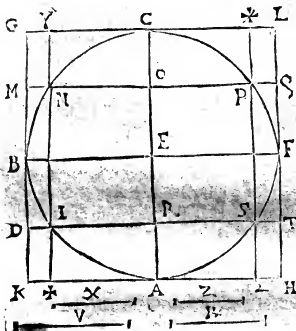
Dico octauo, quod si intelligatur cylindrus DX, circumscribens segmentum intermedium TNPX, & fiat vt CE, ad EV, sic hæc ad I; pariter fiat vt CE, ad EO, sic hæc ad R; & rursum fiat vt OE, ad EV, sic R, ad H, & H, ad k. Erit cylindrus DX, ad prædictum segmentum, vt triplus excessus CE, supra R, ad excessum triplæ CE, supra R, H, k. Ratio dependet ex schol. proposit. 18. lib. prim. in quo dicitur, parallelogrammum V✱, esse ad segmentum OPXV, in ratione assignata.

Dico nono, quod si hemisphærium, seu hemisphæroides BCF, intelligatur sectum plano NOP, ipsi BEF, parallelo, & fiat vt CE, ad EO, sic hæc ad R. Erit segmentum BNPF, ad diametrum, ad portionem NCP, vt duplum rectangulum CEO, vna cum rectangulo sub OE, in excessum CE, supra R, ad quadratum CO, vna cum rectangulo sub CO, & sub excessu CE, supra R; nimirum ad duplum quadratum CO, cum rectangulo sub CO, in excessum OE, supra R. Ex quibus, completa sphæra, & sphæroide, facile potest deduci ratio maioris portionis, ad minorem. Pro inintelligentia allerti, inspiciatur schol. proposit. 20. lib. prim.

Dico decimo, quod si completa sphæra, &c. vt in schem. sequent. ratio AE, ad EO, continuetur ad duos alios terminos X, Z. Cylindrus MH, erit ad portionem maiorem NBAFP, vt tripla AO,

ad

ad duplam A E, cum exceſſu trium E O, ſupra Z; nempe ad duplam A O, cum exceſſu E O, ſupra Z. Ratio petatur ex ſchol. propoſit. 13. lib. prim. huius.



Dico vndecimo, quod ſi cylindrus G H, cum ſphæra, vel ſphæroide ſecetur duobus planis M Q, D T, ipſi B F, parallelis, ipſumque intercipientibus, & fiat vt O E, ad E R, ſic C E, ad V; item fiat vt C E, ad O E, ſic hæc ad X; pariter fiat vt A E, ad E R, ſic hæc ad Z; tandem fiat vt tripla A E, ad exceſſum ipſius ſupra Z, ſic tripla V, ad ℞. Dico vtique eſſe cylindrum M T, ad ſegmentum IBNPFS, vt

vt tres V, cum tribus CE, ad duas CE, hoc eſt ad AC, cum CO, & cum exceſſu OE, ſupra X, vna cum ℞. Et ſubtriplando terminos, eſſe cylindrum prædictum, ad prædictum ſegmentum, vt V, cum CE, ad CO, cum duabus tertijs partibus OE, & cum tertia parte exceſſus ipſius ſupra X, vna cum tertia parte ℞. Probat hoc ſchol. prop. 14. lib prim. huius. in quo probatur parallelogrammum RQ, eſſe ad ſegmentum parabolæ quadraticæ OPFSR, in prædictis rationibus.

Dico duodecimo, quod ſi intelligatur cylindrus Y2, ſecans ſphæram, vel ſphæroides. Cylindrus YP, erit ad portionem NCP, vt OA, ad dimidiam AO, cum ſexta parte CO. Pariter cylindrus N2, erit ad portionem maiorem NBAFP, vt CO, ad dimidiam CO, cum ſexta parte OA. Hoc deducitur ex regula generali tradita in calce ſchol. propoſit. 17. lib. prim. quia parallelogramma CP, PA, ſunt ad portiones parabolæ quadraticæ CPO, OPFA, in dictis rationibus.

SCHOLIVM.

Ex ſuperiori ergo propoſit. licuit animaduertere, quot notitię deducantur in ſphæra, & ſphæroide ex analogia, quæ reperitur inter hæc ſolida, interque parabolam quadraticam. Oſtenſis etenim in lib. pri. quampluribus veritatibus vniuerſaliter in omnibus parabolis, & conſequenter in quadratica, manifeſtatæ

ſtatæ fuere etiam eædem veritates in ſphæra, vel ſphæroide. At nunc antequam nos expediamus ab hac analogia, opere prætium duximus notare; quod cum in noſtro libello 60. Problematum geometricorum, ſoluta fuerint nonnulla problemata in ſphæris, multa horum poſſe applicari & ſphæroidi, & parabolæ quadraticæ. Imo cum, vt deducitur ex coroll. propoſit. 4. huius. & ex ſchol. prim. propoſit. 8. huius. etiam exceſſus cylindri ſupra duos conos inuersè poſitos ſibi inſcriptos, quorum communis vertex ſit medium punctum diametri cylindri, ſit magnitudo proportionaliter analoga cum prædictis; patet hæc applicari poſſe etiam prædicto exceſſui. Quæ autem hæc ſint, facile cognoſcetur ex eodem libello.

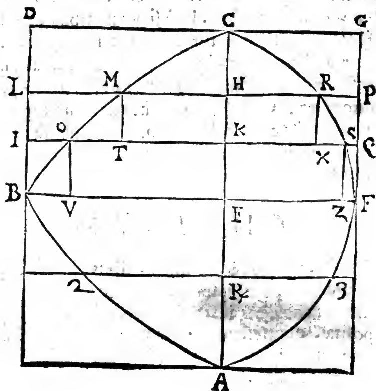
PROPOSITIO X.

Rectangulum circumſcriptum ſemicirculo, eſt ad ipſum, vt rectangulum circumſcriptum ſemiellipſi, ad ipſam, tam ſecundum totum, quam ſecundum partes ſibi correſpondentes, quarum diametri ſint partes proportionales totarum diametrorum.

ESto ſemiellipſis ABC, cum ſibi circumſcripto parallelogrammo DA, & ſemicirculus AFC, cui pariter ſit circumſcriptum parallelogrammum AG, ſitque diameter AC, eadem, ſiue ſint diuerſæ. Dico prim. DA, eſſe ad ABC, vt AG, ad

AFC.

AFC. Si probetur hoc in quadrantibus, idem etiam verificabitur in totis. EC, ergo diuidantur proportionaliter in quotcumque punctis H, k, &c. (ad euitandam autem confusionem secabuntur tantum in duobus) & per ipsa ducantur HM, kO, HR, kS, ipsis BE, EF, parallelæ: item ducantur MT, OV, RX, SZ, CA parallelæ. Quoniam ex Apoll. pri. coni. proposit. 21. in ellipsi est quadratum BE, ad quadratum Ok, vt rectangulum AEC, ad rectangulum AkC; & vt rectangulum AEC, in ellipsi, ad rectangulum AKC, sic ex hypothesi, in circulo rectangulum AEC, ad rectangulum AkC; & pariter in circulo, vt rectangulum AEC, ad rectangulum AkC, sic quadratum EF, ad quadratum kS. Ergo vt quadratum BE, ad quadratum OK, seù VE, sic quadratum FE, ad quadratum kS, seù EZ. Ergo & vt BE, ad EV, nempe vt parallelogrammum Bk, ad parallelogrammum VK, sic FE, ad EZ; nempe parallelogrammum EQ, ad parallelogrammum ES. Eodem modo probabitur, esse parallelogrammum LK, ad Mk, vt KP, ad kR; idemque probaretur de omnibus alijs, si semidiametri CE, supponerentur sectæ in pluribus punctis. Cum autem etiam parallelogramma Bk, kL, & alia si adessent, sint proportionalia parallelogrammis EQ, QH, &c. Patet ad modum superiorum concludi posse, LE, & DE, esse ad omnia parallelogramma in ellipsis quadrante inscripta, vt EP ! G, ad omnia parallelogramma in quadrante circuli inscri-



ſcripta. Ex quibus etiam facile viris Archimedeis patebit, eſſe DE, ad ellipſis quadrantem, vt EG, ad circuli quadrantem. Nam per continuatam biſectionem ſemidiametrorum CE, patet in illis quadrantibus poſſe inſcribi figuras ex parallelogrammis ſibi ſuperimpoſitis conſtantes, deficientes ab ipſis quadrantibus magnitudine quacumque data minori.

Sed dico ſecundo, parallelogrammum v. g. DH, eſſe ad portionem ſemiellipſis HMC, vt HG, ad

CHR: idemque intelligendum esse de omnibus partibus proportionalibus. Imò si portionibus MCH, CHR, intelligerentur circumscripta parallelogramma, hæc essent ad portiones in eadem ratione, tam secundum totum, quam secundum partes proportionales. Quod cum probandum sit supradicto modo, & cum in ijs similibus exempla sæpe repetita sint, ideo hæc omittuntur. Patet ergo propositum.

SCHOLIVM.

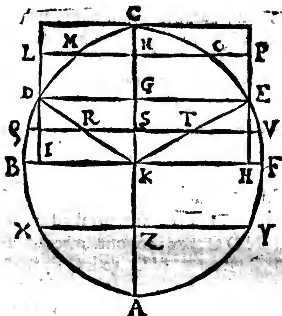
Ex dictis ergo, & ex superioribus manifestè patet, circulum, & ellipsim, esse quantitates proportionaliter analogas iuxta sensum definitionis supra expositæ, quotiescumque diametri secentur à lineis ipsas iuxta exigentiam secantibus, proportionaliter. Hæc patent ex dictis.

PROPOSITIO XI.

Sectores circuli, & ellipsis, siuè maiores, siuè minores, quorum chordæ secent proportionaliter diametros, sunt magnitudines proportionaliter analogæ iuxta sensum explicatum.

Sint ABC, semiellipsis, & AFC, semicirculus; & semiellipsis sint semisectores minor DKC, maior DAK; semicirculi verò sit semisector minor

CKE,



CkE, maior EAk; horum ſemichorde ſint DG,GE, quæ ſecent proportionaliter diametros CA. Dico ſemiſectores minores DkC, CkE, item ſemiſectores maiores DAK, EAk, eſſe magnitudines proportionaliter analogas iuxta ſenſum ſupra explicatum.

Oſtendetur prius de ſemiſectoribus minoribus DkC,CkE,quibus circumſcribantur parallelogramma IC,HC. Tales ſectores,taliaque parallelogramma poſſunt tripliciter ſecari. Primo lineis DG,GE, ſecundo lineis LMN, NOP; tertio lineis QRS, STV. Si ſecentur primo modo.

Quoniam est triangulum DkG, ad parallelogrammum kD, vt triangulum kEG, ad parallelogrammum kE (quia triangula sunt dimidia parallelogrammorum) parallelogrammum verò kD, est ex hypothesi, ad parallelogrammum DC, vt parallelogrammum KE, ad parallelogrammum EC; & ex proposit. anteced. DC, est ad portionem DGC, vt EC, ad portionem GEC. Ergo ex æquali, erit triangulum DkG, ad portionem DGC, vt triangulum kGF, ad portionem GEC.

Si verò secentur lineis LMN, PON. Quoniam triangulum DkG, est ad semiportionem DGC, vt kGE, ad GEC; DGC, autem est ad MNC, vt GEC, ad NOC, ex proposit. anteced. Ergo ex æquali, kDG, est ad MNC, vt kGE, ad NOC. Cum autem ex superioribus, etiam MNC, sit ad DMNG, vt NCO, ad NOEG. Ergo rursum ex æquali, erit KDG, ad DMNG, vt kGE, ad GNOE. Et componendo, KDMN, erit ad DMNG, vt KNOE, ad GNOE. Sed DMNG, est ad MCN, vt GNOE, ad NCO. Ergo tandem ex æquali, erit KDMN, ad MCN, vt kNOE, ad NCO.

Si tandem secentur lineis QRS, STV. Quoniam DGC, est ad triangulum DkG, vt CEG, ad triangulum GkE: triangulum autem DkG, est ad trapezium DRSG, vt triangulum GkE, ad trapezium SGET. Ergo ex æquali, & componendo, erit CDRS, ad DRSG, vt CSTE, ad GSTE. Sed DRSG, est ad RKS, vt GSTE, ad SkT. Ergo rursum ex æquali,

quali, erit C D R S, ad R k S, vt C S T E, ad S k T. Quare probatum est, sectores minores esse magnitudines proportionaliter analogas.

Sed etiam semisectores maiores D A k, E A K, possunt secari tribus modis. Possunt enim primo secari semidiametris B K, K F. Quod autem tunc D B k, sit ad B A K, vt K E F, ad K A F, est manifestum. Quia cum D C G, sit ad totum segmentum D B K G, vt C G E, ad totum segmentum G k F E; & pariter cum eadem D C G, sit ad triangulum D k G, vt C G E, ad triangulum G K E. Ergo & C D G, erit ad reliquum sectorem D B K, vt C G E, ad k E F. Sed etiam D C G, est ad B C k, seu ad B A K, vt C G E, ad K C F, seu ad K A F. Ergo conuertendo, & ex æquali, erit sector D B K, ad B A k, vt K E F, ad k A F.

Possunt secundo secari lineis Q R S, S T V. Et tunc Quoniam probatum est, sectorem B D k, esse ad D G C, vt K E F, ad G E C; & pariter cum probatum sit, D G C, esse ad Q D G S, vt G C E, ad S G E V; & vt D G C, ad D R S G, sic C G E, ad G S T E. Ergo concludetur etiam, esse C G D, ad Q R D, vt C G E, ad T V E. Quare concludetur ex æquali, esse B D K, ad Q R D, vt k F E, ad T V E. Vnde facile concludetur ex dictis, prius componendo, A D k, ad k B D, vt A E k, ad k F E: postea ex æquali, & diuidendo, esse A Q R k, ad Q R D, vt A V T k, ad T V E.

Possunt tertio secari lineis X Z, Z Y. Et Tunc. Quo-

Quoniam componendo, probatum eſt DAk, eſſe ad BAk, vt kAE, ad AkF; & BAk, eſt ad XAZ, vt kAF, ad ZAY. Ergo ex æquali, & diuidendo, erit DXZk, ad XAZ, vt kEYZ, ad AYZ. Probatum eſt ergo prædictos ſectores eſſe quantitates proportionaliter analogas. Quod &c.

SCHOLIVM.

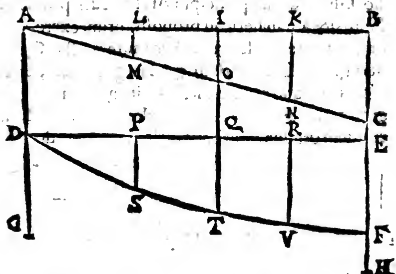
Quæ ſint figuræ proportionaliter analogæ in magnitudine, explicatum fuit initio huius libri. In præſenti autem explicandæ ſunt magnitudines proportionaliter analogæ in grauitate: pro quibus, ſit.

DEFINITIO II.

Plana, vel ſolida proportionaliter analoga in grauitate dicentur, in quibus ductis lineis, vel planis lineæ, vel plano pro regula inſeruiente parallelis, & lineam quandam, quæ ſit, vel altitudo, vel veluti altitudo proportionaliter ſecantibus, ſemper ſecabunt plana, vel ſolida proportionaliter in grauitate, ſeù in partes proportionaliter graues.

Verum, vt etiam hæc definitio clarius explicetur. Dentur duo plana, vel ſolida, vel vnum planum, alterum ſolidum ACB, DFE, quorum altitudines, ſeù veluti altitudines AB, DE, ſiue æquales, ſiue inæquales, ſecentur proportionaliter in quibuslibet punctis L, k, P, R, lineis, vel planis LM, PS; kN,

RV,



RV, parallelis BC, EF, adeo vt sit vt BA, ad AL, sic ED, ad DP, vel vt BA, ad Ak, sic ED, ad DR. Si quam proportionem habet grauitas segmenti LMCB, ad grauitatem segmenti AML, hanc eandem habeat grauitas segmenti PSFE, ad grauitatem segmenti DSP: vel grauitas segmenti kNCB, sit ad grauitatem segmenti ANk, vt grauitas segmenti REFV, ad grauitatem segmenti DVR, & sic semper vbicunque plana, vel solida ducta fuerint. Plana, vel solida ABC, DEF, dicentur proportionaliter analoga in grauitate.

Sed antequam ad vlteriora progrediamur, animaduertere debemus veritatem quandam, quæ ab aliquibus supponitur tamquam principium, ab aliquibus verò, præcipuè, quorum meminimus, à Mari-

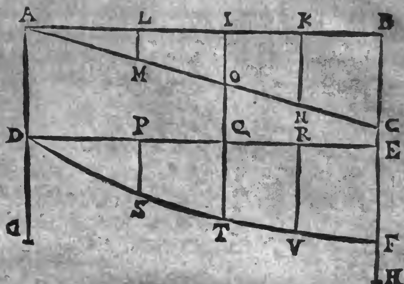
no

no Ghetaldo in principio Archimedis promoti, in ſolidis, & à Caualerio in propoſit. prim. exerc. 5. vniuerſaliter demonſtratur. Hæc autem eſt. Quod ſi duo grauia ſint eiuſdem gradus grauitatis, erit vt moles vnius ad molem alterius, ita grauitas vnius ad grauitatem alterius. V. g. ſi moles ABC, DEF, ſint eiuſdem gradus grauitatis, erit vt magnitudo BAC, ad magnitudinem DEF, ſic grauitas BAC, ad grauitatem EDF. His explicatis, ſit.

PROPOSITIO XII.

Magnitudines proportionaliter analogæ ſecundum ſenſum definitionis primæ huius libri, ſunt proportionaliter analogæ in grauitate.

Sint duæ magnitudines ABC, DEF, proportionaliter analogæ in magnitudine, &c. adeo vt ſectæ v. g. KN, RV, modo explicato, ſit magnitudo BKNC, ad magnitudinem KAN, vt magnitudo ERVF, ad magnitudinem DRV. Dico etiam grauitatem magnitudinis BKNC, eſſe ad grauitatem magnitudinis KAN, vt grauitas magnitudinis ERVF, ad grauitatem magnitudinis RDV. Quoniam enim ex ſuppoſito principio, eſt vt molis BKNC, ad molem KAN, ſic grauitas antecedentis ad grauitatem conſequentis; & ex hypotheſi, eſt vt molis BKNC, ad molem KAN, ſic molis ERVF, ad molem RDV; & vt molis REFV, ad molem RDV,



R D V, ſic grauitas ad grauitatem. Ergo & vt grauitas molis B k N C, ad grauitatem molis k A N, ſic grauitas molis E R V F, ad grauitatem molis D R V. Quod, &c.

SCHOLIVM.

Patet ergo, omnes magnitudines probatas ſupra proportionaliter analogas in magnitudine, eſſe etiam proportionaliter analogas in grauitate.

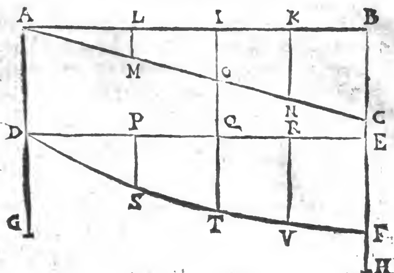
Verum vt ad vlteriora progrediamur, eſt ſupponenda alia veritas, quæ à multis oſtenditur, ſed præcipuè à Caualerio propoſit. 6. cit. exercit. nimirum momenta grauium appenſorum componi ex ratione

magnitudinum, & distantiarum à fulcro. v. g. si I, sit fulcrum libræ AB, in qua in punctis L, k, sint appensæ magnitudines A I O, I B C O; momentum molis A I O, ad momentum molis I B C O, componetur ex ratione molis ad molem, & ex ratione L I, ad I k. Sit ergo.

PROPOSITIO XIII.

Si duo quæcumque grauia fuerint proportionaliter analoga in grauitate, eorum centra grauitatis aberunt proportionaliter ab homologis terminis ipsorum.

SInt duo quæcumque grauia A B C, D F E, proportionaliter analoga in grauitate iuxta sensum definitionis 2. sintque hæc vel ambo plana, vel ambo solida, vel vnum planum, alterum solidum (parum enim refert, cum propositio omnia comprehendat) & quodlibet illorum sit vel inter duas lineas, vel inter duo plana parallela, & horizonti perpendicularia, A D, B C; D G, E F; & horum grauium altitudines, seù veluti altitudines, sint A B, D E; puncta verò A, D, sint extremitates altitudinum homologæ. Dico in his centra grauitatis abesse proportionaliter à punctis A, D. Supponatur A B C, quantitas, cuiuscumque sit generis, appensa à puncto I, à quo descendat horizonti perpendicularis I O; Q T, vero secet D E, in partes D Q, Q E, proportionales ipsis A I, I B; sitque I, cen-



centrum æquilibrij magnitudinis ABC. Dico quod Q, erit etiam centrum æquilibrij magnitudinis EDF. Intelligantur enim ſegmenta AOI, IBCO, appenſa æquilibraliter à punctis L, K; ſintque ipſis LI, IK, proportionales ipſæ PQ, QR. Partes etiam DTQ, TQEF, appenſæ intelligantur à punctis P, R. Momentum magnitudinis COIB, ad momentum magnitudinis OAI, habet rationem compoſitam ex ratione grauitatis magnitudinis COIB, ad grauitatem magnitudinis OAI, & ex ratione diſtantiæ KI, ad diſtantiam IL, ex principio ſuppoſito. At vt grauitas magnitudinis IOCB, ad grauitatem magnitudinis OAI, ſic grauitas molis FTQE, ad grauitatem molis TDQ, ex hypotheſi: & pariter vt kI, ad IL, ſic RQ, ad QP.

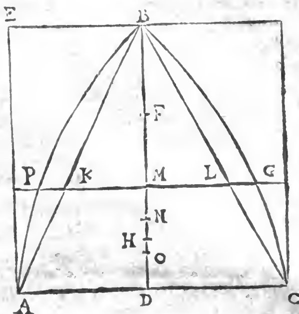
Ergo momentum molis BIOC, ad momentum molis IAO, componetur quoque ex rationibus grauitatis molis EQTF, ad grauitatem molis QDT, & RQ, ad QP. Sed ex eodem principio, etiam momentum magnitudinis TQEF, ad momentum magnitudinis DTQ, componitur ex ijsdem proportionibus. Ergo vt momentum magnitudinis BIOC, ad momentum magnitudinis IAO, sic momentum molis EQTF, ad momentum molis QDT. Sed momenta molium BIOC, IAO, sunt æqualia. Ergo & momenta molium EQTF, QDT, æqualia erunt. Ergo Q, erit centrum æquilibrij molis DEF. Vnde tam in IO, quam in QT, erunt centra grauitatis ipsarum magnitudinum. Ergo ipsarum centra grauitatis aberunt proportionaliter à punctis A, D. Quod erat probandum.

Quam vero fæcunda sit præsens propositio, ex inferius dicendis statim cõstabit. Quamplurium enim magnitudinum centra grauitatis, ex supra in alijs repertis, possunt adinueniri. Sit ergo.

PROPOSITIO XIV.

Centrum grauitatis cuiuslibet conoidis parabolici, cuius exponens sit numerus par, sic diuidit eius axim, vt pars ad verticem sit ad reliquam, vt dimidium numeri conoidis vnitate auctum, ad dimidium numeri conoidis.

ESto conoides parabolicum quodcumque ABC, cuius exponens sit numerus par; sitque eius centrum



centrum grauitatis M. Dico BM, esse ad MD, vt dimidium numeri conoidis vnitate auctum, ad dimidium numeri conoidis. V. g. in conoide quadratico, vt 2. ad 1. In quadratoquadratico vt 3. ad 2. In quadratocubico vt 4. ad 3. Et sic in infinitum. Supponamus A B C, esse etiam parabolam, cuius exponens sit subduplus exponentis trilinei. Quoniam ex schol. 1. proposit. 3. huius, conoides & parabola sunt magnitudines proportionaliter analogæ. Ergo ex proposit. 12. erunt etiam proportionaliter analogæ in grauitate. Ergo ex proposit. anteced. eorum centra grauitatis aberunt proportionaliter à verticibus

bus B. Sed M, centrum grauitatis in parabola sic secat BD, vt BM, sit ad MD, vt numerus parabolæ vnitate auctus ad numerum parabolę ex schol. pri. proposit. 2. lib. 3. Ergo & in conoide. Sed numerus parabolæ est dimidium numeri conoidis. Ergo in conoide erit BM, ad MD, vt dimidium numeri conoidis vnitate auctum, ad dimidium numeri conoidis. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Patet ergo proposit. 41. lib. 2. Lucæ Valerij de cent. gra. & omnium illorum, qui probant in conoide parabolico quadratico, M, sic secare BD, vt BM, sit ad MD, vt 2. ad 1. esse nostræ corollarium.

PROPOSITIO XV.

Centrum grauitatis excessus cylindri circumscripti conoidi antec. proposit supra conoides, sic diuidit axim conoidis, vt pars ad verticem sit ad reliquam, vt dimidium numeri conoidis vnitate auctum, ad sesquialterum numeri conoidis vnitate auctum.

Conoidi ABC, antec. propos. sit circumscriptus cylindrus EC, & F, sit centrum grauitatis excessus cylindri supra conoides. Dico BF, esse ad FD, vt dimidium numeri conoidis vnitate auctum

auctum ad sesquialterum numeri conoidis vnitate auctum. V.g. in quadratico vt 2. ad 4. In quadrato quadratico vt 3. ad 7. In quadratocubico vt 4. ad 10. & sic in infinitum. Nam si supponamus, vt prius, ABC, esse parabolam, cuius exponens sit subduplus exponentis conoidis, & EC, esse parallelogrammum ei circumscriptum, patebit ex prop. 3. huius, & ex schol. prim. eiusd. excessum cylindri supra conoides, & excessum parallelogrammi supra parabolam, esse magnitudines proportionaliter analogas. Ergo & ex dictis in hoc libro, erunt magnitudines proportionaliter analogæ in grauitate. Ergo eorum centra grauitatis æqualiter aberunt à B. Sed ex schol. proposit. 8. lib. 3. F, centrum grauitatis excessus parallelogrammi supra parabolam, sic diuidit BD, vt BF, sit ad FD, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad triplum numerum parabolæ vnitate auctum. Ergo & in conoide. Sed quia numerus parabolæ est dimidium numeri conoidis, numerus parabolæ vnitate auctus est dimidium numeri conoidis vnitate auctum; sicuti triplus numerus parabolæ vnitate auctus, est sesquialterum numeri conoidis vnitate auctum. Quare patet propositum.

SCHOLIVM.

Sed ex doctrinis superius traditis, non modo habemus centra grauitatis prædicta, sed etiam centrum grauitatis frustorum conoideorum supra explicato-

catorum, contentorum inter duo plana basi parallela. V. g. si ducatur planum PMG, basi ADC, parallelum, habebimus centrum grauitatis frusti APGC. Ratio est, quia si supponamus ABC, esse etiam parabolam, cuius exponens sit subduplus numeri conoidis, segmentum APGC, parabolæ est, ex dictis, proportionaliter analogum in grauitate cum segmento APGC, conoidis. Cum ergo ex proposit. 10. lib. 3. assignatum sit centrum grauitatis segmenti APGC, parabolæ cuiuscumque, assignatum etiam erit centrum grauitatis segmenti APGC, conoidis cuiuscumque, cuius exponens sit numerus par.

Ex quibus patere potest propos. 42. lib. 2. de cent. grau. Lucæ Valerij, in qua probat H, centrum grauitatis segmenti APGC, conoidis parabolici quadratici, sic secare MD, vt MH, sit ad HD, vt duplum quadratum AD, cum quadrato PM, ad duplum quadratum PM, cum quadrato AD, esse veluti corollarium deductum ex nostra methodo vniuersali. Nam cum ductis AB, BC, in parabola, segmentum APGC, sit magnitudo proportionaliter analoga in grauitate cum trapezio AkLC, ex superius dictis; cum H, centrum grauitatis trapezij sic diuidat MD, vt MH, sit ad HD, vt dupla AD, cum KM, ad duplam kM, cum AD, vt probatum est in schol. prim. præc. prop. 10. lib. 3. sequitur H, centrum grauitatis frusti conoidis quadratici sic secare MD. Sed cum ex genesi parabolæ,

læ, sit vt AD, ad kM, sic quadratum AD, ad quadratum PM; vnde est vt dupla AD, cum kM, ad duplam kM, cum AD, sic duplum quadratum AD, cum quadrato PM, ad duplum quadratum PM, cum quadrato AD. Ergo in frusto conoidis, MH, erit ad HD, vt duplum quadratum AD, cum quadrato PM, ad duplum quadratum PM, cum quadrato AD. Imò si MD, secetur in tres partes æquales MN, NO, OD, habebimus ex dictis in schol. citat. H, centrum frusti APGC, sic secare NO, mediam tertiam partem MD, vt NH, sit ad HO, vt quadratum AD, ad quadratum PM. Quod nõ vidimus animaduertisse Lucam Valerium.

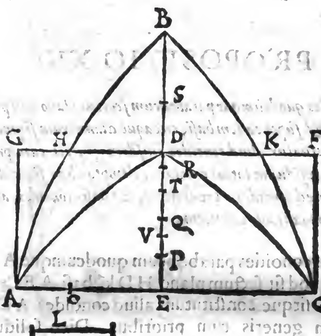
Sed centrum grauitatis, talis frusti cuiuscumque conoidis, cuius exponens sit numerus par, inuenietur alijs etiam duobus modis. Si enim conoides ABC, sit sectum plano HDk, plano AEC, parallelo, inueniemus primò sic eius centrum grauitatis. BE, BD, secentur in Q, & S, vt tam BQ, sit ad QE, quam BS, ad SD, vt dimidium numeri conoidis vnitate auctum ad dimidium numeri conoidis. Ergo ex proposit. antec. S, & Q, erunt centra grauitatis conoideorum ABC, HBk. Ratio AE, ad HD, continuetur in tot terminos vt numerus eorum excedat ternario numerum conoidis, & sit vltimus minimus terminus L; fiatque vt excessus AE, supra L, ad L, sic SQ, ad QV. Dico V, esse centrum quæsitum. Cum enim, ex proposit. pri. lib. 2. sit conoides ABC, ad conoides HBK,

vt poteſtas A E, duplo gradu altior poteſtate conoidis, ad ſimilem poteſtatem H D, nempe vt A E, ad L. Ergo & diuidendo, erit A H K C, ad H B k, vt exceſſus A E, ſupra L, ad L; nempe reciprocè vt S Q, ad Q V. Ergo V, erit centrum quæſitum.

Secundo. Reperiantur S, & Q, centra grauitatis conoideorum A B C, H B K; intellectoque conoide A D C, eiuſdem generis cum prioribus, ſit P, eius centrum grauitatis. Fiat vt B D, ad D E, ſic P Q, ad Q R. Ergo R, vbicunque cadat, erit centrum grauitatis A B C D, exceſſus conoidis A B C, ſupra conoides A D C. Quod patebit, quia ſupra factum eſt, vt B D, ad D E, ſic P Q, ad Q R. Sed vt B D, ad D E, ſic ex propoſit. 3. lib. 2. huius, diuidendo, A B C D, ad conoides A D C. Ergo vt A B C D, ad A D C, ſic reciprocè P Q, ad Q R. Ergo ex Archim. R, erit centrum grauitatis A B C D. Quod notetur, & ſeruetur.

Fiat vt rectangulum A O C, differentia inter quadrata A F, H D, ad quadratum H D, ſic S R, ad R T. Ergo T, erit centrum grauitatis exceſſus fruſti A H k C, ſupra conoides A D C. Quod pariter ſic patebit. Quoniam enim, vt patebit in ſequenti propoſit. A B C D, eſt ad H B k, vt quadratum A E, ad H D, quadratum. Ergo diuidendo, erit A H D k C D, ad H B k, vt rectangulum A O C, ad H D, quadratum; nempe ex conſtructione, vt S R, ad R T, reciprocè. Sed R, eſt centrum totius A B C D; S, eſt centrum conoidis H B K. Ergo T,

erit



erit centrum solidi A H D k C D.

Tandem ratio A E, ad H D, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat numerum conoidis binario; & P T, sic diuidatur in V; vt PV, sit ad V T, vt duo vltimi minimi termini ad reliquos. Dico punctum V, esse centrum grauitatis quæsitum frusti A H k C. Quod sic patebit. Nam cum factum sit P V, ad V T, vt duo vltimi minimi termini inuenti ad reliquos; & cum vt tales duo minimi termini ad reliquos, sic ex corollar. proposit 4. lib. 2. A H D k C D, ad A D C. Ergo erit reciproce, vt PV, ad V T, sic solidum A H D k C D, ad conoides

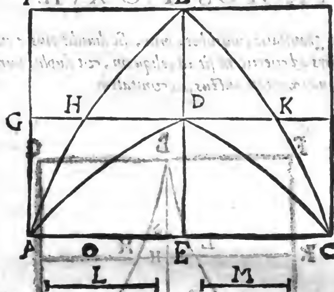
ADC. Ergo V, erit ex Archim. centrum quæsitum.

PROPOSITIO XVI.

Si conoides quodcumque parabolicum secetur plano basi parallelo, & super eadem basi, circaque diametrum segmenti, constituatur aliud conoides eiusdem generis cum priori. Erit residuum totius conoidis, dempto ab eo secundo conoide, ad conoides ad verticem, vt basis conoidis, ad basim conoidis ad verticem.

ESto conoides parabolicum quodcumque ABC, quod sit sectum plano HDk, basi AEC, parallelo, sitque constitutum aliud conoides ADC, eiusdem generis cum prioribus. Dico solidum ABCD, esse ad conoides HBK, vt basis AEC, ad basim HDk, seu vt quadratum AE, ad quadratum HD. Ratio AE, ad HD, continuetur in tot terminos, vt eorum numerus excedat numerum conoidis ternario, sitque vltimus minimus terminus M, L, verò sit ante penultimus; nempe excedens numerum conoidis vnitate. Quoniam conoides ABC, est ad conoides ADC, vt BE, ad ED, ex proposit. 3. lib. 2. Ergo per conuersionem rationis, & conuertendo, erit ABCD, ad ABC, vt DB, ad BE. Sed vt DB, ad BE, sic potestas HD, eiusdem gradus cum conoide, ad similem potestatem AE; & vt talis potestas ad talem potestatem, sic L, ad AE.

Ergo

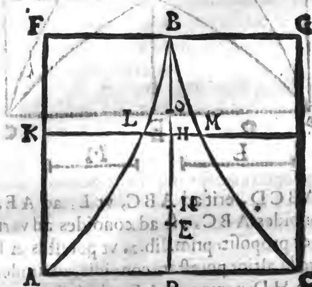


Ergo ABCD, erit ad ABC, vt L, ad AE. Verum conoides ABC, est ad conoides ad verticem HBk, ex proposit. prim. lib. 2. vt potestas AE, duplici gradu altior potestate conoidis, ad similem potestatem HD; nempe vt AE, ad M. Ergo ex æquali, erit ABCD, ad HBk, vt L, ad M. Sed vt L, ad M, sic AE, ad tertiam proportionalem ipsarum AE, HD; & vt AE, ad talem tertiam, sic quadratum AE, ad quadratum HD. Ergo, & vt quadratum AE, ad quadratum HD; nempe vt basis ad basim, sic ABCD, ad HBk. Quod &c.

PRO.

PROPOSITIO XVII.

Centrum grauitatis cuiuslibet conici, sic diuidit eius axim, vt pars ad verticem sit ad reliquam, vt duplus numerus conici vnitate auctus, ad vnitatem.



SIt conicus quicumque A B C, sitque eius centrum grauitatis E. Dico B E, esse ad E D, vt duplus numerus conici vnitate auctus, ad vnitatem. Nempe in prim. conico, scilicet in cono, vt 3. ad 1. In sec. vt 5. ad 1. In tertio vt 7. ad 1. & sic in infinitum. Supponamus A B D, esse etiam trilineum, cuius exponens sit duplus numeri conici. Quoniam ex proposit. 4. huius, conicus A B C, & trilineum

ABD,

ABD, sunt magnitudines proportionaliter analogæ, & consequenter ex proposit. 12. sunt proportionaliter analogæ in grauitate; ergo eorum centra secabunt BD, eodem modo. Sed ex schol. primi proposit. 2. lib. 3. centrum E, trilinei ABD, sic diuidit BD, vt BE, sit ad ED, vt numerus trilinei vnitate auctus, ad vnitatem; qui numerus trilinei vnitate auctus, quoniam numerus trilinei duplus est numeri conici, est duplus numerus conici vnitate auctus. Ergo E, centrum grauitatis conici, sic diuidet BD, vt BE, sit ad ED, vt duplus numerus conici vnitate auctus ad vnitatem. Quod, &c.

SCHOLIVM.

Patet ergo proposit. 39. Lucæ Valerij lib. pri. de cent. grauit. & omnium illorum, qui probant, centrum grauitatis coni sic secare axim, vt pars ad verticem sit ad reliquam vt 3. ad 1. esse nostræ corollarium.

PROPOSITIO XVIII.

Centrum grauitatis excessus cylindri circumscripti cuilibet conicorum supra ipsum, sic diuidit axim conici, vt par, ad verticem sit ad reliquam, vt duplus numerus conici vnitate auctus, ad duplum numerum conici ternario auctum.

Conico

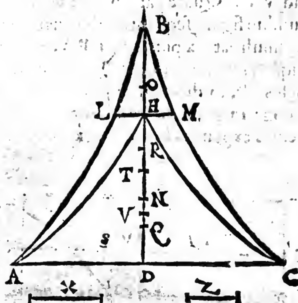
Conico ABC, antec. propositi sit circumscriptus cylindrus FC, & H, sit centrum grauitatis excessus cylindri FC, supra conicum ABC. Dico BH, esse ad HD, vt duplus numerus conici vnitate auctus, ad duplum numerum conici ternario auctum. V. g. in pri. annulo vt 3. ad 5. In sec. vt 5. ad 7. In tert. vt 7. ad 9. Et sic in infinitum. Nam supponamus, vt prius, ABD, esse etiam trilineum, cuius exponens sit duplus numeri conici, & FD, esse parallelogrammum sibi circumscriptum. Patebit ex schol. pri. proposit. 4. huius. Excessum cylindri supra conicum, & semiparabolam FBA, esse magnitudines proportionaliter analogas; & consequenter, ex dictis, esse etiam magnitudines proportionaliter analogas in grauitate. Ergo eorum centra grauitatis aberunt æqualiter à B. Sed ex schol. 2. proposit. 2. lib. 3. centrum æquilibrij semiparabolæ FBA, sic diuidit FA, v. g. in k, vt Fk, sit ad kA, vt numerus parabolæ vnitate auctus, ad numerum parabolæ ternario auctum; qui numerus parabolæ vnitate auctus, est duplus numerus annuli vnitate auctus, quia numerus parabolæ supponitur duplus numeri annuli, sicuti propter eandem causam, numerus parabolæ ternario auctus, est duplus numerus annuli ternario auctus. Ergo H, centrum grauitatis prædicti annuli, sic secabit BD, vt BH, sit ad HD, vt duplus numerus annuli vnitate auctus, ad duplum numerum annuli ternario auctum. Quod &c.

SCHO-

SCHOLIVM.

Sed etiam nunc, ex doctrinis supra traditis, non modo habemus centra grauitatis prædicta, sed etiam aliorum solidorum, quæ nunc explicabimus. Primo habebimus centrum grauitatis frusti cuiuscumque conici, resecti plano basi parallelo. V. g. si conicus ABC, secetur plano LHM, basi ADC, parallelo, habemus centrum grauitatis frusti ALMC. Hoc autem centrum tribus modis habetur. Primo, quia cum, ex superius dictis, pateat, frustum conicum ALMC, esse proportionaliter analogum in grauitate cum trapezio ALHD, cuius exponens sit duplus exponentis frusti, & cum trapezij cuiuscumque inuentum sit centrum æquilibrij in diametro HD, in proposit. 12. lib. 3. inuentum erit consequenter centrum grauitatis frusti conici ALMC. Secundo inuenietur sic. Tam BD, quam BH, sic secentur in O, N, vt BO, ad OH, & BN, ad ND, sint vt duplus numerus conici vnitate auctus ad vnitatem. Ergo ex proposit. 17. O, & N, erunt centra grauitatis conicorum ABC, LBM. Fiat autem, vt excessus potestatis DB, duplici gradu altioris potestate conici, supra similem potestatem BH, ad ipsam potestatem BH, sic ON, ad NE. Punctum E, erit centrum grauitatis frusti ALMC. Nam cum ex schol. proposit. 1. lib. 2. sit vt potestas DB, duplici gradu altioi poteitate conici, ad simi-

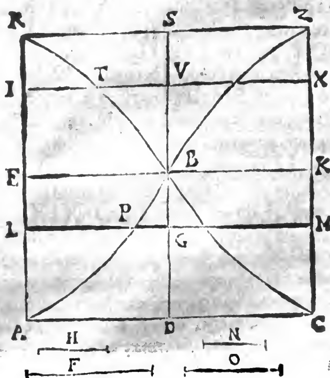
lem poteſtatem BH, ſic conicus ABC, ad conicum LBM. Ergo diuidendo, erit ALMC, ad LBM, vt exceſſus poteſtatis DB, gradus explicati, ſupra ſimilem poteſtatem BH, ad ſimilem poteſtatem BH; hempe ex conſtructione, reciprocè, vt ON, ad NE. Patet ergo, quod ſi ſupponamus ABC, conum eſſe; ex dictis HO, eſſe quartam partem BH; & eſſe ON, ad NE, vt exceſſus cubi DB, ſupra cubum BH, ad cubum BH. Componendoque, eſſe OE, ad EN, vt cubus DB, ad cubum BH. Vnde patet, propoſit. 25. lib. 3. de cent. grau. Lucæ Valerij, in qua ait. *Omnis fruſti coni, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo eius axis ſic diuiditur, vt pars, quæ minorem baſim attingit aſſumens quartam partem axis ablati coni, ſit ad eam, quæ inter poſtremam ſectionem, & quartæ partis abſciſſæ ad baſim axis totius coni terminum interijcitur; vt cubus, qui ſit ab axe totius, ad cubum, qui fit ab axe ablati coni.* eſſe huius veluti corollarium. Tertio, ſint O, & N, centra conicorum ABC, LBM, vt prius; & intellecto conico AHC, eiuſdem gradus cum prioribus, ſit eius centrum grauitatis Q. Si ergo fiat vt BH, ad HD, ſic QN, ad NR. Erit R, centrum grauitatis ſolidi ABCH. Nam ex propoſit. 3. lib. 2. eſt diuidendo, ABCH, ad AHC, vt BH, ad HD; nempe reciprocè vt QN, ad NR. Fiat SD, æqualis LH, & fiat vt rectangulum ASC, ad quadratum LH, ſic OR, ad RT. Ergo T, erit centrum grauitatis ſolidi ALMCH. Cum enim ſit (vt probabitur in propoſit. ſequent.) ſoli-



ſolidum A B C H, ad conicum L B M, ad verticem, vt quadratum A D, ad quadratum L H. Erit diuidendo, ſolidum A L M C H, ad L B M, vt rectangulum A S C, ad quadratum L H; nempe ex conſtructione, reciprocè, vt O R, ad R T. Tandem ratio D B, ad B H, continuetur in tot terminos, vt numerus eorum excedat duplum numerum conici vnitate; & Q T, ſic ſecetur in V, vt fiat vt omnes hæ proportionales præter D B, ad D B, ſic Q V, ad V T. Dico punctum V, eſſe quæſitum centrum. Etenim, ex corollar. propoſit. 5. lib. 2. patet eſſe omnes illas proportionales inuentas abſque D B, ad D B, vt ſolidum A L M C H, ad conicum A H C. Ergo erit reciprocè, vt A L M C H, ad A H C, ſic

QV, ad VT. Quare patet propositum.

Secund. in figura sequenti, habemus centrum grauitatis annuli lati ex portione LPA, parabolæ cuiuscumque, reuoluta circa GD. Ratio est, quia talis annulus, est, ex dictis, magnitudo proportionaliter analoga in grauitate cum portione simili parabolæ, cuius exponens sit duplus exponentis annuli.



Sed portionis LPA, parabolæ cuiuscumque, est inuentum in proposit. 14. lib. 3. centrum grauitatis in basi

basi LA. Ergo consequenter erit inuentum centrum grauitatis annuli ex LPA, in GD.

Imò ex eadem proposit. est etiam inuentum centrum grauitatis annuli stricti ex segmento EBPL, ad diametrum reuoluto circa BG.

Ex proposit. 19. lib. 3. inuentum est centrum grauitatis annuli stricti ex RBPL, portione maiori cuiuscumque parabolæ, reuoluta circa SG.

Ex proposit. autem 21. eiusdem libri, inuentum est centrum grauitatis annuli stricti ex segmento ITBPL, reuoluto circa SD.

Tandem si mente concipiamus inter plana ITX, EBK, traici aliud planum ipsi EBK, parallelum; inuentum erit ex proposit. 17. lib. 3. centrum grauitatis partis annuli contentæ inter planum ductum, & planum ITX.

PROPOSITIO XIX.

Si conicus quicumque secetur plano basi parallelo, & super eadem basi, circaque diametrum segmenti constituatur alius conicus eiusdem generis cum priori. Erit residuum totius conici, dempto ab eo secundo conico, ad conicum ad verticem, vt basis conici, ad basim conici ad verticem.

ESto conicus ABC, in schem. posito pag. 395. qui sit sectus plano LHM, basi ADC, parallelo, & intelligamus alium conicum AHC, eiusdem ordi-

ordinis cum A B C. Dico solidum A B C H, esse ad conicum ad verticem L B M, vt basis A D C, ad basim L H M. Ratio D B, ad B H, continuetur in tot terminos vt numerus eorum excedat duplum numerum conici binario, & sint duo vltimi minimi termini X, Z. Quoniam enim ex proposit. 5. lib. 2. conicus A B C, est ad conicum A H C, vt B D, ad D H. Ergo per conuersionem rationis, & conuertendo, erit A B C H, ad A B C, vt B H, ad B D. Sed quoniam, ex proposit. 2. eiusdem lib. 2. A B C, est ad L B M, vt potestas D B, cuius numerus sit duplus vnitate auctus numeri conici, ad similem potestatem B H; & vt talis potestas ad talem potestatem, sic D B, ad Z. Ergo A B C, erit ad L B M, vt D B, ad Z. Ergo ex æquali, erit A B C H, ad L B M, vt B H, ad Z. Sed vt B H, ad Z, sic D B, ad X, quia tot proportionales interijciuntur inter secundum terminum H B, & vltimum Z, ac inter primum D B, & penultimum X. Ergo A B C H, erit ad L B M, vt D B, ad X. Sed Z, est vltimus terminus terminorum excedentium duplum numerum conici binario. Ergo X, excedet duplum numerum conici vnitate. Ergo ratio D B, ad X, erit duplicata rationis D B, ad talem terminum prædictæ seriei, qui excedat numerum conici vnitate. Sed quoniam ex natura parabolarum, & trilineorum explicata, est A D, ad L H, vt potestas D B, eiusdem gradus cum parabola ad similem potestatem B H; & vt talis potestas ad talem potestatem, sic D B, ad talem terminum prædictæ seriei, cuius

ius numerus excedat numerum conici vnitate. Ergo AD, ad LH, erit vt DB, ad illum terminum excedentem vnitate numerum conici. Ergo & quadratum AD, erit ad quadratum LH, vt DB, ad X, ad quam habet duplicatam rationem illius, quam habet ad illum terminum. Sed vt DB, ad X, ita probatum est esse ABCH, ad LBM; & vt quadratum AD, ad quadratum LH, ita basis ADC, ad basim LHM. Ergo vt basis ADC, ad LHM, sic ABCH, ad LBM. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO XX.

Variorum segmentorum sphæræ, sphæroidis, & excessus cylindri supra duos conos inuersè positos, quorum bases oppositæ bases cylindri, vertex vero medium punctum axis cylindri, assignare centrum grauitatis.

PRobauimus supra in proposit. 8. & in scholijs eiusdem, sphæram, sphæroides, & excessum cylindri supra duos conos, esse magnitudines proportionaliter analogas, & inter se, & cum parabola quadratica, tam secundum totum, quam secundum partes (si parabola secetur lineis diametro parallelis, secantibus proportionaliter basim parabolæ, & diametrum, seu axim prædictorum solidorum.) Ergo, ex superioribus, erunt etiam omnia hæc proportionaliter analoga in grauitate. Ergo habito centro grauitatis vnius illorum tam secundum totum, quam

secun-

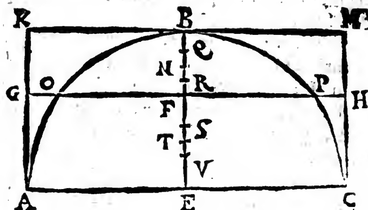
ſecundum partes, habebimus etiam centrum grauitatis aliorum, &c. Cum autem ſupra aſſignata ſint centra æquilibrij parabolæ quadraticæ, variarumque eiuſdem partium, appenſarum ſecundum baſim; ex ipſis centris inuentis, deducentur centra talium ſolidorum. Explicabimus autem hæc tantum in ſphæra, & quæ de ipſa dicentur, intelligenda etiam erunt & de ſphæroide, & de illo exceſſu.

Eſto ergo ABC, hemiſphærium, &c. Dico primo, quod ſi BE, eius axis ſic ſecetur in T, vt BT, ſit ad TE, vt 5. ad 3. T, erit centrum grauitatis hemiſphærij. Nam ſi ſupponamus ABE, eſſe ſemiparabolam quadraticam, cuius baſis BE. Erit ex ſchol. 2. propoſit. 2. lib. 3. T, centrum æquilibrij ſemiparabolæ.

Sed intelligamus hemiſphærio circumſcriptum cylindrum kC, & ſupponamus N, eſſe centrum grauitatis exceſſus cylindri ſupra hemiſphærium, ſeù hemiſphæroides ABC, & etiam coni, cuius baſis kBM, axis BE. Dico EN, eſſe ad NB, vt 3. ad 1. Deducitur ex ſchol. 1. eiuſdem prop. Quia centrum æquilibrij trilinei quadratici AkB, in prædicta ratione ſecat AK.

Item ex eodem ſcholio habemus, quod ducto plano GFH, AC, parallelo; centrum grauitatis, exceſſus cylindri GC, ſupra ſegmentum AOPC, quod ſit S, ſic diuidit EF, vt ES, ſit ad SF, vt 3. ad 1. Patet, quia talis exceſſus eſt proportionaliter analogus in grauitate cum trilineo AGO.

Si



Si autem ſupponamus N, & S, eſſe centra prædicta, & fiat SN, ad NQ, vt exceſſus cubi kA, ſeù BE, ſupra cubum EF, ad cubum EF. Q, erit centrum grauitatis exceſſus cylindri KH, ſupra portionem hemiſphærij, ſeù hemiſphæroidis OBP, & fruſti coni, cuius baſis KM, vertex E, quod fruſtum continetur inter plana kM, GH. Hoc deducitur ex ſchol. 2. propoſit. 12. 3. Quia centrum æquilibrij trapezij kGOB, parabolæ quadraticæ ſecat kG, in eadem proportione.

Ex ſchol. 1. propoſit. 14. lib. 3. elicietur, centrum grauitatis portionis OBP, eſſe in BF, prius ſecta bifariam in N; deinde ſecta NB, in Q, ſecundum centrum grauitatis trapezij kGOB; tandem in puncto R, in quo FN, dimidium axis portionis ſic diuiditur, vt QN, ſit ad NR, vt exceſſus triplæ BE, ſupra BE, EF, & harum

tertiam minorem proportionalem, ad has tres proportionales.

Ex schol. 1. proposit. 16. 3. centrum grauitatis segmenti AOPC, est in FE, prius secta bifariam in T; postea sic in S, vt FS, sit quarta pars FE; tandem secta TE, in tali puncto V, vt ST, quarta pars FE, sit ad TV, vt dupla BE, cum excessu BE, supra tertiam continuè minorem proportionalem ipsarum BE, EF, ad hanc tertiam. Ratio est, quia V, est etiam centrum æquilibrij suppositi segmenti parabolici ad diametrum AOFE. Imo cum in calce eiusdem scholij sit adnotatum ex schol. 2. & 3. proposit. 10. lib. 1. posse inueniri alio modo centrum grauitatis talis segmenti AOFE, parabolæ quadraticæ, eodem etiam modo poterit reperiri V, centrum grauitatis segmenti hemisphærij, &c.

Sed supponamus, hemisphærium cum cylindro secari alio plano DQ, parallelo AC. Ratio autem BE, ad EZ, continuetur in I, & fiat vt ZE, ad EF, sic I, ad R, & R, ad S. Centrum grauitatis segmenti intermedij OLNP, erit in ZF, prius secta bifariam in T; postea in V, secundum centrum grauitatis trapezij parabolici DGOL, seù excessus cylindri DH, supra segmentum OLNP: tandem sic in X, tali puncto in dimidia TF, vt VT, sit ad TX, vt excessus triplæ EB, supra tres I, R, S, ad ipsas. Vel X, centrum grauitatis prædicti segmenti sic locatum erit, vt VT, sit ad TX, vt rectangula

gula EBZ, EZB, EFZ, cum duobus tertijs quadrati FZ, ad rectangulum ZEF, cum tertia parte quadrati ZF. Hæc autem asserta facile probabuntur ex schol. 1. proposit. 17. lib. 3.

Sed esto sphæra, vel sphæroides ABCD, cum sibi circumscripto cylindro KL, qui secetur plano GH, AC, parallelo. Centrum grauitatis portionis maioris. OBP, est in FB, prius secta bifariam in T; deinde in Q, & R, sic vt EQ, ER, sint triplæ ipsarum QB, RF; postea secta RQ, sic in S (quod erit centrum grauitatis excessus cylindri kH, supra ipsam portionem) vt RS, sit ad SQ, vt cubus BE, ad cubum EF; tandem in T, tali puncto, in quo IR, sic diuiditur, vt SI, sit ad IT, vt dupla BF, cum excessu EF, supra quartam minorem proportionalem proportionis BE, ad EF, ad BE, cum illa quarta proportionali. Ratio asserti habetur ex schol. 1. proposit. 19.

Tandem cylindrus kH, secetur plano V℞, AC, parallelo, adeo vt plana V℞, GH, intercipiant planum, AC; & fiat vt QE, ad EF, sic BE, ad ✱ 2, cuius tripla sit ✱ 3, & fiat vt BE, ad EQ, sic hæc ad 4; item fiat vt BE, ad EF, sic hæc ad S; tandem fiat vt tres BE, ad excessum ipsarum supra S 4, sic ✱ 3, ad 3 ✱. Centrum grauitatis segmenti intermedij OXZP, erit in QF, prius secta bifariam (supponatur) in I; deinde in S, & R, sic, vt ES, ER, sint

K B M V X Q Z ℞ S Y I T A C E R O P G H F N D L ✱ ✱ 2 3 2 S

triplæ

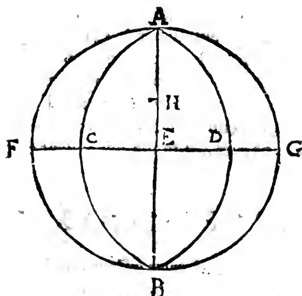
triplæ ipsarum SQ, RF; postea secta sic RS, in Y, (quod erit centrum grauitatis excessus cylindri VH, supra segmentum) vt RY, sit ad YS, vt cubus QE, ad cubum EF; tandem in T, puncto in FI, dimidia totius axis segmenti attingente minorem basim, in quo sic diuiditur, vt YI, sit ad IT, vt 3 *, cum dupla BE, seu cum BD, & cum excessu BE, supra 4, ad ✳ *, vna cum 4. Omnia dependent ex proposit. 21. lib. 3.

PROPOSITIO XXI.

Omnis portionis, & omnis sectoris Ellipsis, centrum grauitatis reperire.

SIt Ellipsis, cuius quælibet portio CAD, diameter AB; & huius portionis sit inueniendum centrum grauitatis (sufficit enim inuenire centrum grauitatis tantum vnius portionis, ex tali enim centro inuento, patebit modus inueniendi centrum cuiuscumque portionis, & etiam cuiuslibet sectoris). Super diametro AB, fiat circulus cadens intra, vel extra ellipsim, & secans CD, etiam productam si opus sit, in F, G. Portionis FAG, circuli, sit centrum grauitatis H. Dico H, esse centrum grauitatis etiam portionis ellipsis CAD. Patet ex superius dictis; illæ enim circuli, & ellipsis portiones, sunt magnitudines proportionaliter analogæ in grauitate.

Qua-



Quare patet propositum. Cum ergo res sit de sè euidens, in eius explicatione non est amplius immorandum.

SCHOLIVM.

Hæc sunt, benignè lector, quæ pro hac vice, determinauimus tibi communicare.. Statueramus ab initio, etiam conscribere librum quintum de infinitis spiralibus; at quoniam nobis interest quam citius præsentem librum publicam lucem intueri, ideo determi-

terminauimus hunc pro sequenti anno reseruare. Huic attamen associabimus alium libellum, in quo agetur de centro grauitatis hyperbolæ, & nonnulla trademus, quæ tibi haud iniucunda fore arbitramur. Imò aliquam doctrinam in hoc libro traditam ampliabimus. Hæc potuissent conscribi simul cum his, & magis, magisque emicuissent superius tradita. Attamen etiam sequenti anno, fæcunditas doctrinarum in hoc opere explicatarum, magis, magisque apparebit. An autem in præsenti libro à nobis elaborata tibi pergrata futura sint, ignoramus. Vnum autem nobis sufficiat, nimirum in hoc opere contenta, non displicuisse Excellentissimo Viro, condiscipuloque nostro amantissimo Petro Mengolo, Bononiæ publicè Mathesim profitente; cui vt in plurimis scientijs, ita in Mathematicis neminem quis rectè antepofuerit. Quam plurimos in hoc libro errores reperies, haud tamen considerationis multæ. De duobus vero cupimus te monitum esse. Primum est, quod pag. 92. schema ibi appositum non est proprium, sed debet conspici illud pag. 90. Hoc autem factum est thypographi incuria. Secundum est, quod in schema pag. 162. linea curua GC, debet transire per intersectionem linearum MB, HF, quod pariter à sculptore originem duxit. Reliquos quos adinuenies, partim sunt proprij, partim ab ipsa impræssione inseparabiles. Pro proprijs vero arbitramur facile nos à tè posse veniam impetrare, si alicuius operis impræssionem aliquando expertus fueris,

præ-

præcipuè mathematicæ, & subtilis speculationis. In correctione etenim, intellectus auctoris sic est abstractus, sicque incumbit substantiæ, vt impossibile propemodum sit vnica reuisione, qualis nostra fuit, omnia adnotare. Vale.

FINIS.